Centro de Estudios Tecnológicos, Industrial y de Servicios No.1

"Coronel, Matilde Galicia Rioja"

GUIA DE ESTUDIO

PARA EXÁMEN EXTRAORDINARIO

ASIGNATURA*: Calculo Integral*

Semestre Agosto 2021 – Enero 2022

Profesor (a):____ Calificación:________________

Alumno:____ Grupo: __________________

Unidad I

Aproximar límites de sumas

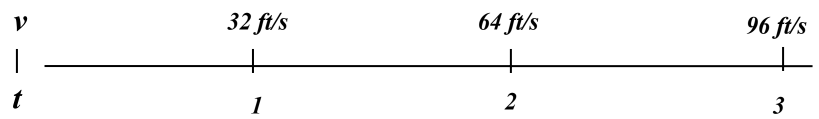
Vamos a considerar cuatro problemas aparentemente diferentes. Sin embargo, cada uno involucra en algún sentido una suma infinita, esto es, el límite de la suma de *n* términos a medida que n se hace más y más grande. No resolveremos ninguno de estos problemas, si no que obtendremos aproximaciones a sus soluciones.

Ejemplo 1

Se deja caer un objeto de manera que su velocidad es $32t$ ft/seg hallar la distancia recorrida en los tres primeros segundos.

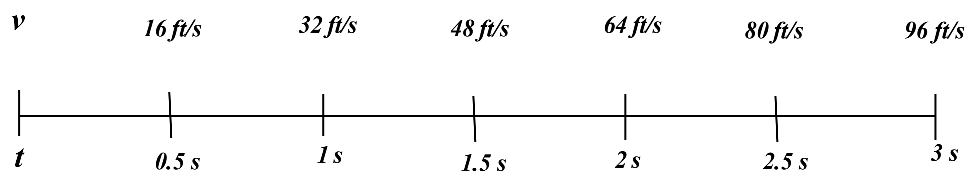
La física nos dice que si la velocidad es constante, entonces la distancia recorrida es igual al producto de la velocidad por el tiempo transcurrido. Pero ¿Cómo podemos encontrar la distancia si la velocidad varía? Nuestro enfoque a este problema consiste en aproximar la distancia recorrida sobre pequeños intervalos y luego sumar estas distanciaspara aproximar a la distancia total.

Vamos a dividir el tiempo total en subintervalos de 1 segundo



Intervalo de tiempo	Velocidad al final del intervalo de tiempo $v = 32t$	Distancia aproximada recorrida durante el intervalo $d = v.\Delta t$
$t = 0$ a $t = 1$	32	32
$t = 1$ a $t = 2$	64	64
$t = 2$ a $t = 3$	96	96
Total		192 pies

Dividiendo ahora el tiempo total en subintervalos de 0.5 segundos tenemos 6 subintevalos

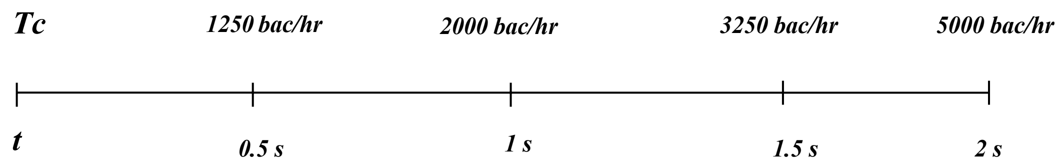


Intervalo de tiempo	Velocidad al final del intervalo de tiempo $v = 32t$	Distancia aproximada recorrida durante el intervalo $d = v.\Delta t$
$t = 0$ a $t = 0.5$	16	8
$t = 0.5$ a $t = 1$	32	16
$t = 1$ a $t = 1.5$	48	24
$t = 1.5$ a $t = 2$	64	32
$t = 2$ a $t = 2.5$	80	40
$t = 2.5$ a $t = 3$	96	48
Total		168 pies

Esta aproximación es más exacta que la anterior y entre más divisiones se tengan la aproximación se acerca hacia un límite definido que en este caso sería la distancia recorrida en los tres primeros segundos

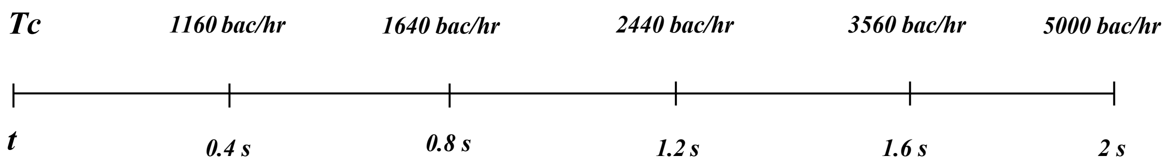
Ejemplo 2. Una colonia de bacterias crece en tal forma que al final de t horas su tasa de crecimiento es de $1000\left(1+t^2\right)$ bac/hr ¿en cuánto crece la colonia durante las dos primeras horas?

Primera aproximación vamos a dividir el tiempo total en subintervalos de 0.5 segundos



Intervalo de tiempo	Tasa de crecimiento al final del intervalo de tiempo $Tc \square 1000\left(1+t^2\right)$	Numero de bacterias que crecen durante el intervalo de tiempo $NB \approx Tc \times \Delta t$
0 – 0.5	1250	628.25
0.5 – 1	2000	1000
1 – 1.5	3250	1625
1.5 - 2	5000	2500
Total		5753.25 bacterias

Segunda aproximación dividiendo ahora el tiempo total en subintervalos de 0.4 horas

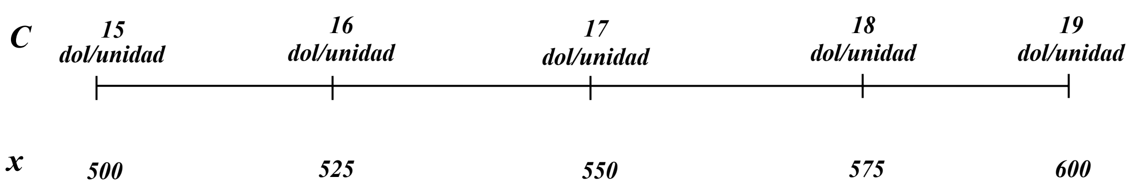


Intervalo de tiempo	Tasa de crecimiento al final del intervalo de tiempo $Tc \quad 1000\left(1+t^2\right)$	Numero de bacterias que crecen durante el intervalo de tiempo $NB \approx Tc \times \Delta t$
0 – 0.4	1160	464
0.4 – 0.8	1640	656
0.8 – 1.2	2440	976
1.2 – 1.6	3560	1424
1.6 - 2	5000	2000
Total		5520 bacterias

Esta aproximación es más exacta que la anterior y entre más divisiones se tengan la aproximación se acerca hacia un límite definido que en este caso representa el número de bacterias que se reproducen durante las dos primeras horas.

Ejemplo 3 Supongamos que una compañía ha determinado que su costo marginal de producción es $(0.04x-5)$ dólares/unidad, cuando el nivel de producción es de *x* unidades. Hallar el costo adicional cuando el nivel de producción es de 500 a 600 unidades.

Primera aproximación dividiendo el intervalo en subintervalos de 25 unidades



El intervalo se divide en cuatro partes iguales y la aproximación se hace con los valores del extremo derecho

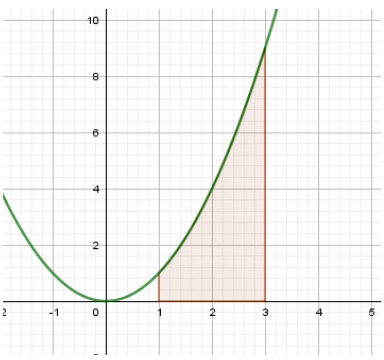
Intervalo de unidades	Costo marginal de produccion C = $(0.04x-5)$	Costo adicional $C \approx C.\Delta x$
25	16	400
25	17	425
25	18	450
25	19	475
		1750 dolares

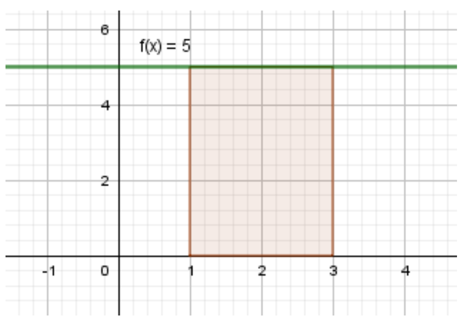
Si tomamos los valores del extremo izquierdo, la tabla queda de la siguiente manera

Intervalo de tiempo	Costo marginal de produccion C = $(0.04x-5)$	Costo adicional $C \approx C.\Delta x$
25	15	375
25	16	400
25	17	425
25	18	450
		1650 dólares

Nota: en ambos casos el resultado es una aproximación, tomando extremos derechos nos acercamos al valor real por la parte de arriba y tomando extremos izquierdos nos acercamos por la parte de abajo

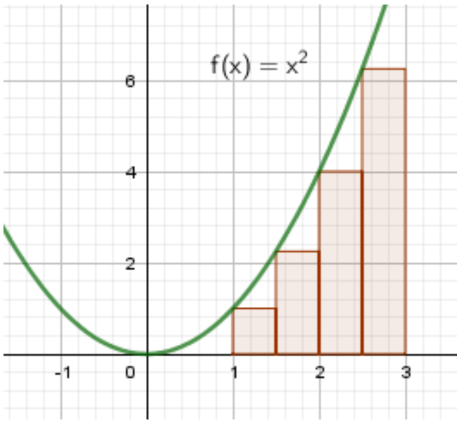
Ejemplo 4 Hallar el área sombreada: bajo la curva $y = x^2$ por arriba del eje x y entre las rectas $x = 1$ y $x = 3$





Por geometría sabemos que si una función es constante, entonces el área es el producto de la altura por la anchura pero ¿cómo encontramos el área si la función no es constante? Aproximamos el área sobre pequeños intervalos y luego sumamos estas para obtener la aproximación total.

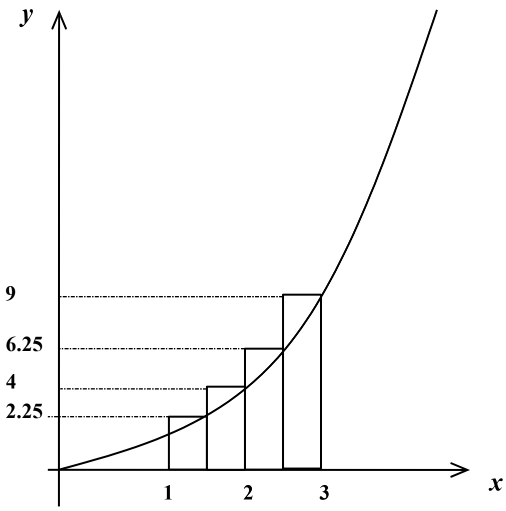
Subintervalos de 0.5 unidades y tomando extremos izquierdos



$$A = 0.5(1) + 0.5(2.25) + 0.5(4) + 0.5(6.25) = 6.75u^2$$

o también $$A = 0.5(1 + 2.25 + 4 + 6.25) = 6.75u^2$$

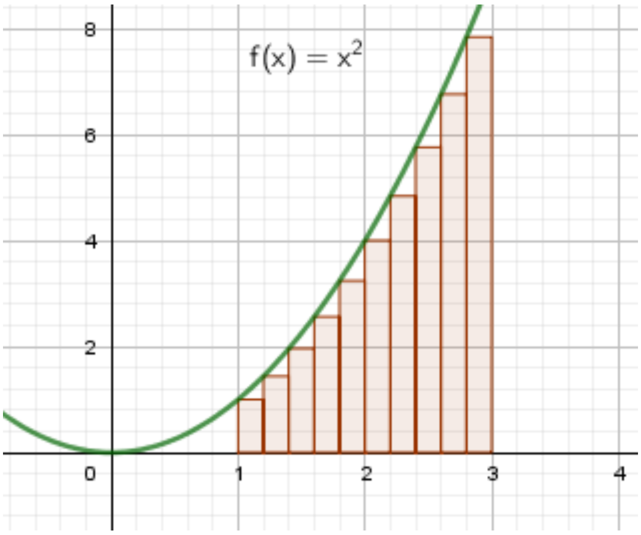
Subintervalos de 0.5 unidades y tomando extremos derechos



$$A = 0.5(2.25) + 0.5(4) + 0.5(6.25) + 0.5(9) = 10.75u^2$$

o también $$A = 0.5(2.25 + 4 + 6.25 + 9) = 10.75u^2$$

Subintervalos de 0.2 unidades y extremos izquierdos



EJERCICIO 1 LÍMITE DE UNA SUMA INFINITA

Resolver los siguientes ejercicios (Para resolverlos será útil tener una calculadora manual)

1. Supongamos que la velocidad de un cohete t segundos después del lanzamiento es de $\frac{t^2}{100} millas/s$

   Hallar dos aproximaciones a la distancia recorrida durante los 10 primeros segundos. Para la primera aproximación divídase el intervalo en cuatro subintervalos iguales y para la segunda en cinco. Elíjanse los extremos derechos para calcular las velocidades pertinentes.

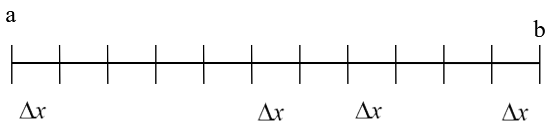
2. Supongamos que cierta población animal crece de manera que después de w semanas la tasa de crecimiento es de $500(1+4w)$ animales/semana. Hallar dos aproximaciones al incremento en la población durante la quinta semana, es decir, entre $w=4$ y $w=5$. Dividir el tiempo total en cuatro subintervalos iguales usando a) extremos derechos de los subintervalos para una aproximación y b) los extremos izquierdos para la otra.

3. Si el costo marginal en un nivel de producción de x unidades es $0.002x-0.3$ dólares/unidad hallar una aproximación al costo adicional de elevar el nivel de producción de 1000 a 1050 unidades. Usar 5 intervalos iguales y usar extremos derechos para calcular el costo marginal pertinente

Definición de la integral definida.

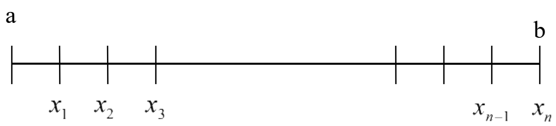
En general todos los problemas que consideramos involucran una función $f(x)$, un intervalo $a \le x \le b$ y sumas de aproximación obtenidas como sigue:

1) Se divide el intervalo en n subintervalos de longitud igual. La longitud debe denotarse por Δx



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

2) Se elige un punto en cada subintervalo.



3) Se evalúa la función en cada punto seleccionado: se multiplica este valor por la longitud del subintervalo Δx y entonces se suman estos productos

4) $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x$

5) Si estas sumas tienen un valor límite cuando n tiende al infinito o $\Delta x \to 0$, entonces a este límite se le llama integral definida de *"f"* sobre el intervalo que va de a a b, y se denota mediante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Lo cual se lee "integral definida desde a hasta b de f de x dx". Así tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x\right]$$

Observaciones sobre la integral definida.

1) La integral definida sólo se define si el valor límite no depende de la elección de los puntos dentro de los subintervalos.

2) $\int_a^b f(x).dx$ es un número.

3) Puede mostrarse que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \le x \le b$, entonces existe la integral

$\int_a^b f(x).dx$.

4) La suma finita que aparece arriba, se denomina suma de Riemann. La integral definida como

acabamos de definirla se llama la integral de Riemann.

5) Si f se da como una función de t o de u o de alguna otra variable, entonces escribimos $\int_a^b f(t).dt$

o $\int_a^b f(u).du$. La variable x, t, u,… se llama bosquejo variable.

6) La función $f(x)$ en $\int_a^b f(x).dx$ es llamada el integrando; a y b se llaman límites de integración o simplemente los límites; a es el límite inferior y b el límite superior

Ejemplo 1

Expresar cada una de las siguientes áreas que determinamos con exactitud en los ejemplos anteriores, cada una como una integral definida.

a) $y = x^2$ Entre x = 0 y x = 1 $\int_0^1 x^2dx$

b) $y = 3x^2 + 1$ Entre x = 0 y x = 1 $\int_0^1 (3x^2 + 1)dx$

c) $y = 2x + 3$ Entre x = 1 y x = 5 $\int_1^5 (2x + 3)\, dx$

Ejemplo 2

Hallar la distancia recorrida entre los instantes t_1 y t_2 por un objeto que se desplaza a lo largo de una recta si su velocidad en el instante t es $v(t)$

La distancia recorrida sobre un pequeño subintervalo del tiempo es aproximadamente igual al producto de su velocidad en un punto del subintervalo y la duración del subintervalo. La suma de estos productos es la distancia aproximada total. La distancia exacta es el límite de estas sumas cuando el número de subintervalos tiende al infinito. Así la distancia D recorrida entre t_1 y t_2 está dada por

$$\boxed{D = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt}$$

Ejemplo 3

Hallar el número total de nuevos matrimonios entre los tiempos $t = a$ y $t = b$ si $M(t)$ es el número de matrimonios diarios t días a partir de una fecha determinada.

El número de matrimonios que tiene lugar sobre un pequeño subintervalo del tiempo es aproximadamente igual al producto de la tasa matrimonial por la longitud en días del subintervalo. El numero total T de nuevos matrimonios que tienen lugar entre $t = a$ y $t = b$ es el límite de la suma de estos productos cuando n tiende al infinito. Por lo tanto

$$\boxed{T = \int_a^b M(t)\,dt}$$

Ejemplo 4

Hallar el costo adicional C que resulta de un aumento en la producción del nivel L_1 al nivel L_2

unidades si $M(x)$ es el costo marginal en el nivel de producción de x unidades.

$$\boxed{C = \int_{L1}^{L2} M(x)\,dx}$$

Ejemplo 5

Hallar el cambio R en los ingresos que resulta de cambiar el nivel de producción desde 400 hasta 450 unidades si $f(x)$ es el ingreso marginal en el nivel de producción de x unidades.

$$\boxed{R = \int_{400}^{450} f(x)\,dx}$$

EJERCICIO 3

1) Hallar el número total T de divorcios ocurridos en febrero de 1978 si $D(t)$ es el número de divorcios que tienen lugar diariamente al final del día t de 1978. Explica por que

2) Hallar el cambio P ocurrido en una población entre los tiempos t_1 y t_2 si $G(t)$ es la tasa de crecimiento de la población en le tiempo t. Explica por que

3) Hallar el cambio C en el peso de un animal entre el día de su nacimiento y su quinto aniversario de vida si $A(t)$ es la tasa de crecimiento a los t años. En libras por año. Explica porque

4) Hallar la cantidad A de dinero que ganan en el tercer año 100 pesos si la tasa de crecimiento después de t años es $6e^{0.06t}$. Explica porque

5) Hallar el numero N de personas que se enteran d un rumor durante las 24 primeras horas, si $R(t)$ es la tasa a la que se propaga el rumor, medida en personas por hora, t horas después de iniciado el rumor. Explica tu respuesta

6) Hallar el número Q de personas que contraen una enfermedad durante la segunda semana de una epidemia si $D(t)$ es la tasa, de personas por día, a la que se propaga la enfermedad a los t días. Explícalo

El teorema fundamental de cálculo.

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F'(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Este teorema nos permite evaluar integrales definidas sin tener que recurrir a la definición como límite de una suma infinita. Para evaluar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, solo necesitamos encontrar una función F cuya derivada sea f, evaluar F en b, y entonces sustraer de este valor el valor de F en a. La cantidad $F(b) - F(a)$ suele denotarse como $F'(x)\Big]_a^b$.

Ejemplo 1

Evaluar $\int_1^5 3x^2 dx$

Lo que necesitamos es una función cuya derivada sea $3x^2$. Pero es fácil: la derivada de x^3 es $3x^2$. De esta forma

$$\int_1^5 3x^2 dx = x^3\Big]_1^5 =$$

$$=(5)^3 - (1)^3 = 124\ u^2$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_2^5 \left(4x^3 + 1\right) dx$

La función que derivada nos da $4x^3 + 1$ es …. $x^4 + x$ por lo que

$$\int_2^5 \left(4x^3 + 1\right) dx = x^4 + x\Big]^5 =$$

$$\left[(5)^4 + 5\right] - \left[(2)^4 + 2\right] = 612u^2$$

Ejemplo 3 Evaluar $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 2x\right) dx$

$1 \quad x$

$$\int^3 \left(\frac{1}{\ } - \quad 2x\right| dx = Ln\ x - x$$

$$\left(\right)^{2}\left(\right) \quad |\,| \quad \Big]_{1}^{3} =$$

$$\left[Ln(3)-3^2\right]-\left[Ln(1)-1^2\right]=-7.901-(-1)=-6.901$$

Evaluar $\int_0^1 e^x\,dx$

La función que derivada da e^x es e^x. En esta forma

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$$

$$=2.71-1=1.71$$

Ejemplo 4 Usar el teorema fundamental de cálculo para encontrar el área bajo la curva

a) $\int_0^1 x^2 dx =$

$$=\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \left[\frac{(1)^3}{3}\right]-\left[\cancel{\frac{(0)^3}{3}}\right]=\frac{1}{3}$$

b) $\int_1^3 (3x^2+1)dx =$

$$=x^3+x\Big]_1^3=\left[3^3+3\right]-\left[1^3+1\right]=$$

$$=\left[27+3\right]-\left[1+1\right]=28\ u^2$$

c) $\int_2^5 (2x+3)\,dx =$

$$=\left[x^2+3x\right]_2^5=\left[5^2+3(5)\right]-\left[1^2+3(1)\right]=28\ u^2$$

$$=\left[25+15\right]-\left[1+3\right]=36\ u^2$$

EJERCICIO 4

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{3}^{5} 2x.dx =$

d) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx =$

b) $\int_{0}^{2} 6x^2 dx =$

e) $\int_{0}^{1} e^x dx =$

c) $\int_{1}^{2} 4x^3 - 3x^2 dx =$

f) $\int_{1}^{3} (4x^2 + 6x + 3) dx =$

2. Si la velocidad de un objeto que se mueve a lo largo de una línea es en el tiempo t, $5t^4$ pies por segundo, ¿qué tanto recorre en los dos primeros segundos?

3. Si el costo marginal de producción es $1 \; x$ dólares por unidad cuando la producción tiene un nivel de x unidades. ¿Cuál es el cambio en el costo al pasar el nivel de producción de 50 a 75 unidades?

4. Si la tasa de crecimiento de una colonia de bacterias es $7t^6 + 3t^2$ bacterias por hora, al cabo de t horas, ¿Cuál es el cambio en la población durante la tercera hora?

5. Hallar el área bajo la gráfica de $f(x) = 3x^2$ entre x = 1 y x = 3

6. calcular las siguientes integrales definidas

Unidad II

La integral indefinida

A la operación de calcular la anti derivada de (primitiva) de una función se le llama integración y se denota con el símbolo $\int$ que es la inicial de la palabra suma.

Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ se expresa

$\int f(x)dx = F(x) + C$ Si y solo si $F'(x) + C = f(x)$

La expresión $\int f(x)dx$ es la antiderivada de $F(x)$.

$\int$ Es el signo de integración, se lee "integral de"

- $f(x)$ Integrando
- dx Diferencial de la variable
- x Variable de integración
- $F(x)$ Función primitiva
- C Constante de integración

Integrales inmediatas

A partir de este momento las antiderivada de una función se determinara de manera práctica en especial las funciones polinómicas de grado entero aplicando las siguientes formulas y propiedades:

Fórmulas de integración básica a partir de aquí consideremos a u como cualquier función de la variable x

Núm.	Formula o propiedad	descripción
1	$\int k.dx = kx + C$	La integral de una constante es igual a la constante multiplicada por la variable x
2	$\int k.f(x).dx = k\int f(x)dx$	La integral del producto de una constante por una función $f(x)$ es igual a la constante por la integral de la función
3	$\int dx = x \cancel{+C}$	La integral de la diferencial de la variable x
4	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	La integral de una suma o resta de funciones es igual a la integral de cada término implicado en la suma o resta.
5	$\int x^n dx = \frac{n.x^{n+1}}{n+1} + C$	La integral de una potencia es igual a la potencia n multiplicada por la variable x aumentada su potencia en 1 y dividida entre la potencia aumentada
6	$\int \frac{dx}{x} = Ln\ x + C$	La integral de la dx entre la variable x es igual al logaritmo natural de x

7	$\int e^x.dx = e^x + C$	La integral de e^x es igual a e^x, donde e representa un logaritmo neperiano base (2.71…)

Ejemplo 1

$$\int 7x^4 dx =$$

$$7\int x^4 dx =$$

$$= 7\int x^4 dx = \frac{7}{5}x^5 =$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{3}{5} dx =$$

$$\int \frac{3}{5} dx = \frac{3}{5}x + C$$

Mismo caso anterior Se aplica la propiedad 1 porque $\frac{3}{5}$ es una constante

Ejemplo 3

$$\int 7x^4 dx =$$

$$7\int x^4 dx =$$

Se aplica la propiedad 2 (sacar la constante e integrar la potencia x^4)

$$= 7\int x^4 dx = \frac{7}{5}x^5$$

se aplica la fórmula 5 aumentar la potencia en 1 y dividir entre la misma potencia

Ejemplo 4

$$\int \frac{2}{3}x^5 dx =$$

Mismo caso que el ejemplo 3

$$\frac{2}{3}\int x^5 dx = \frac{2}{3}.\frac{x^6}{6} = \frac{2}{18}x^6 = \frac{1}{9}x^6 + C$$

Las fracciones se simplifican a su mínima expresión

Ejemplo 5 $\int (5x^2 + 7x - 2)dx =$

La integral de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales individuales

$$= 5\int x^2dx + 7\int xdx - 2\int dx = \quad 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 2x =$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + C$$

Ejemplo 6

$$\int (3x^{-5} + 7x^{-4} - \frac{2}{x})dx =$$

Igual que el ejemplo 5 tenemos una suma de tres términos, por lo tanto son tres integrales individuales.

$$= 3\int x^{-5}dx + 7\int x^{-4}dx - 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^{-4}}{-4} + \frac{7}{-3}x^{-3} - 2Ln\,|x| + C$$

Ejemplo 7

$$\int \left(2x^3 + 6x^2 + x - 3\right)dx =$$

$$= 2\int x^3.dx + 6\int x^2.dx + \int x.dx - 3\int dx =$$

$$= 2\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + C \qquad = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

Ejemplo 8

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}.dx + \int e^x.dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int e^x.dx = \qquad = Ln\left|x\right| + e^x + C$$

EJERCICIO 5 INTEGRALES INMEDIATAS

Resuelve las siguientes integrales utilizando la fórmula de la potencia

1. $\int 7x^6 dx =$

2. $\int 6x^3 dx =$

3. $\int (4x^3 - 2x^2 + x - 6)dx =$

4. $\int (5x^3 + 3x^2 - x + 2)dx =$

5. $\int (-3x^3 - 5x^2 - x - 10)dx =$

6. $\int (8x^7 - 5x^5 - x^{-3})dx =$

7. $\int \left(9x^{8} - 5x^{4} - 2x\right)dx =$

8. $\int \left(3x^{5} + 2x^{4} + 5x^{2} - x\right)dx =$

9. $\int \left(-2x^{-1/2} + 2x^{-2/3} + 5x^{-1/4}\right)dx =$

10. $\int \left(x^{10} - x^{9} + 7x^{4} + 2\right)dx$

11. $\int \left(x^{100} + 32x^{31} - 25x^{4} - 18\right)dx$

12. $\int \left(3x^{-5} - 5x^{-3} + 10x^{-1}\right)dx =$

13. $\int \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 1 \right) dx =$

14. $\int \left(x^5 + x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$

15. $\int \left(x + 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^5} \right) dx$

16. $\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$

17. $\int \left(8x^3 - \frac{2}{x} + 2 \right) dx$

18. $\int \left(x^{1/3} - x^{3/2} + x^{2/5} - 3 \right) dx$

Integrales que requieren realizar una operación previa

En muchas ocasiones es necesario primero simplificar o rescribir la integral de otra manera y finalmente integrarla, en el siguiente caso primero se simplifica.

EJEMPLO 1

$$\int \left(\frac{x^4 - 3x^2 + 4}{x} \right) dx =$$

PRIMERO REALIZAMOS LA DIVISION

$$\int \left(x^3 - 3x + \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$\int x^3 . dx - 3 \int x . dx + 4 \int \frac{dx}{x} =$$

$$\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 4 \ln |x| + C$$

EJEMPLO 2

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 5}{\sqrt{x}} dx$$

PARA REALIZAR LA DIVISIÓN ESCRIBIMOS EL DENOMINADOR COMO UNA POTENCIA

$$= \int \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^{1/2}} dx =$$

$$= \int \left(3x^{3/2} + 2x^{1/2} - 5x^{-1/2} \right) dx =$$

$$= 3\int x^{3/2} dx + 2\int x^{1/2} dx - 5\int x^{-1/2} dx =$$

$$= 3\frac{x^{5/2}}{5/2} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} - 5\frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

Finalmente simplificamos

$$= \frac{6}{5} x^{5/2} + \frac{4}{3} x^{3/2} - 10x^{1/2} + C$$

5 3

EJEMPLO 3

$$\int 3t^2(5t+3t^2-t^3)dt =$$

En este caso se trata primero de multiplicar

$$= \int \left(15t^3 + 9t^4 - 3t^5\right)dt =$$

$$= 15\int t^3 dt + 9\int t^4 dt - 3\int t^5 dt =$$

$$= 15\frac{t^3}{3} + 9\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^6}{6} + C$$

EJEMPLO 4

$$\int (3t^2-5)^2 dt =$$

Resolvemos primero el binomio al cuadrado

$$= \int \left(9t^4 - 30t^2 + 25\right)dt =$$

$$= 9\int t^4 dt - 30\int t^2 dt + 25\int dt =$$

$$= 9\frac{t^5}{5} - 30\frac{t^3}{3} + 25t + C$$

$$= \frac{9}{5}t^5 - 10t^3 + 25t + C$$

EJERCICIO 6 INTEGRALES QUE INVOLUCRAN UNA SOLUCIÓN PREVIA

1. $\int \frac{8x^3 + 6x^2 - 10x}{2x} dx$

2. $\int \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^2} dx$

3. $\int \frac{9x^4 + 15x^2 + 30}{3x} dx$

4. $\int \frac{x^2 - x + 2}{x} dx$

5. $\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$

6. $\int \frac{x^{10} - x^4 + x - 1}{2x^3} dx$

Integración de Funciones compuestas.

Sustitución por cambio de variable.

Existen varias técnicas para aplicar una sustitución pero el propósito de todas es identificar en el integrando una función que este multiplicada por la diferencial de esa función, y así poder aplicar la fórmula de integración. El proceso de integración que utilizaremos es el siguiente.

Integral original ⇒ Reescribir ⇒ Integrar ⇒ Simplificar

Integral de una potencia. La integral de una función u de una variable x elevada a un exponente es igual a la función elevada al exponente original más uno, todo dividido entre el exponente originalmás uno.

$$\int u^{n} du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{Con } n \neq -1$$

Ejemplo:

Integral original	Reescribir	integrar	simplificar
$\int x^2 dx =$	$\int x^2 dx$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{1}{3}x^3 + C$
$\int \frac{1}{x^3} dx$	$\int x^{-3} dx$	$\frac{x^{-4}}{-4}$	$-\frac{1}{4x^4}$
$\int \sqrt{x} dx =$	$\int x^{1/2} dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + c$
$\int 3x^2 dx =$	$3\int x^2 dx$	$3\frac{x^3}{3}$	$x^3 + c$

Estrategia para el cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. En general conviene elegir la parte interna de alguna función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Hallar du
3. Reescribir la integral dada en términos de u
4. Hallar la integral resultante en términos de u
5. Sustituir u por $g(x)$ para obtener la primitiva en términos de x
6. Verificar la respuesta por derivación

Ejemplos formula de la potencia $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Ejemplo 1 $\int (3x-1)^4 .3dx$

Analizando la integral pareciera ser que puede ser resuelta directamente con la fórmula de la potencia $\int u^n du$.

Identificamos u y du

$u = 3x - 1$
$du = 3.dx$

Elegimos como u la función compuesta elevada a la potencia 3 y después derivamos

La derivada de $3x$ es simplemente 3.*dx*

Observamos que la integral está completa,

Por lo tanto $\int \underbrace{(3x-1)}_{u}{}^4 \underbrace{.3dx}_{du}$ *se puede escribir en términos de u como*

$\int u^4 du$ *y se resuelve aplicando la fórmula de la potencia*

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C$$

Reescribiendo el resultado en términos de x *tenemos*

$$\frac{(3x-1)^5}{5} + C$$

Ejemplo 2 $\int (2x+1)(x^2+x)dx =$ $\int (2x+1)\underbrace{(x^2+x)}_{u}dx =$

Primero identificamos la función compuesta u y la derivamos

$u = x^2 + x$
$du = (2x+1)dx$

Observamos que la integral está completa por lo que se puede escribir en términos de u de la siguiente manera:

$\int u.du =$ Aplicamos la fórmula de la potencia para resolver la integral

$\int u.du = \frac{u^2}{2} + C$ Finalmente reescribimos en términos de “x”

$$= \frac{\left(x^2 + x\right)^2}{2} + C$$

Ejemplo 3 $\int x^2 \sqrt{x^3 - 2}dx$ = $\int x^2 \underbrace{\left(x^3 - 2\right)}_{u}^{1/2} dx$

$$u = x^3 - 2$$
$$du = 3x^2 dx$$

En este caso observamos que a nuestra integral le hace falta un valor numérico = 3, cuando esto ocurre la integral se puede completar multiplicando y dividiendo por dicho valor, entonces al completar la integral tenemos

$$\underset{\text{completado}}{\frac{1}{3}} \int \underset{\text{completado}}{3} x^2 \left(x^3 - 2\right)^{1/2} dx$$

Ahora si podemos escribir la integral en términos de u

$$\frac{1}{3}\int u^{1/2} du =$$

Aplicando la fórmula para integrar una potencia se resuelve la integral

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{9} u^{3/2} + C$$

Escribimos el resultado final en términos de x $= \frac{2}{9}\left(x^3 - 2\right)^{3/2} + C$

Ejemplo 4 $\int x\left(1-2x^2\right)^7 dx$

Identificamos u y derivamos

$$u = 1 - 2x^2$$
$$du = -4x.dx$$

Completamos un -4 a la integral

$$-\frac{1}{4}\int -4x\left(1-2x^2\right)^7 dx =$$

Reescribimos la integral en términos de u

$$-\frac{1}{4}\int u^7 du$$

Integramos

$$-\frac{1}{4}.\frac{u^8}{8} = -\frac{u^8}{32} + C$$

Escribimos resultado en términos de x

$$= \frac{\left(1-2x\right)^8}{32} + C$$

Ejemplo 5 $\int \cos^2 x.senx.dx$

= $\int \underbrace{\left(\cos 5x\right)}_{u}{}^2\, sen5x.dx$

Identificamos u y derivamos

$$u = \cos 5x$$
$$du = 5.sen5x.dx$$

Completamos un 5 a la integral

$$\frac{1}{5}\int(\cos 5x)^2\, 5sen5x.dx$$

Reescribimos la integral en términos de u

$$\frac{1}{5}\int u^2 du$$

Integramos con la fórmula de la potencia

$$=\frac{1}{5}\frac{u^3}{3}=\frac{u^3}{15}+C$$

Escribimos el resultado en términos de x

$$=\frac{\cos^3 5x}{15}+C$$

Algunas integrales cuyos integrandos contienen una expresión elevada a una potencia no pueden ser resueltas por la regla general de las potencias. Consideremos las dos integrales

$\int x\left(x^2+1\right)dx$ y $\int\left(x^2+1\right)^2 dx$

La sustitución $u = x^2+1$ resuelve la primera, pero no la segunda (porque al integrando le falta el factor x necesario para du). Por fortuna, esta integral particular es factible desarrollando el integrando como un binomio al cuadrado $\left(x^2+1\right)^2 = x^4+2x^2+1$.

En la primera integral solo hace falta un valor numérico (2), por lo consiguiente se tiene que multiplicar y dividir la integral por (2); lo cual no altera el valor del integrando porque, de hecho se está multiplicando por uno.

Ejemplo 6

$\int x\left(x^2+1\right)dx$ =

$\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)dx =$

$u = x^2+1$

$du = 2xdx$

$\frac{1}{2}\int u.du =$

$\frac{1}{2}\frac{u^2}{2} = \frac{u^2}{4}+C$

$\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4}+C$

$\int\left(x^3+3\right)^2\left(x^2\right)dx =$

$u = x^3+3$

$du = 3x^2dx$

$\frac{1}{3}\int u^2du =$

$\frac{1}{3}\frac{u^3}{3} = \frac{u^3}{9}+C$

$\frac{\left(x^3+3\right)^3}{9}+C$

1. $\int(1+2x)^4(2)dx$

2. $\int x\left(x^2-1\right)^3dx$

3. $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$

4. $\int x\left(1-3x^2\right)^3 dx$

5. $\int x^2\left(x^3-1\right)^4 dx$

6. $\int x^2\sqrt{x^3-1}\,dx$

7. $\int 5x\sqrt{x^2-3}\,dx$

8. $\int \left(6x^3+8\right)\left(3x^2\right)dx$

9. $\int 4x\left(4x^2+3\right)^3 dx$

12. $\int x^2\left(1+x^3\right)^2 dx$

10. $\int 5x.\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$

13. $\int 5x^2\left(16-x^3\right)^2 dx$

11. $\int 12t^3\sqrt{t^4+2}.dt$

14. $\int t^3\left(t^4-10\right)^3 dt$

INTEGRALES QUE GENERAN LOGARITMOS NATURALES

Cuando el exponente de una función es igual a -1 la fórmula de la potencia $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ya no es válida por la siguiente razón

$$\int x^{-1}.dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \infty$$

Como vemos al aplicar la fórmula de la potencia el denominador es igual a cero lo cual ya no es factible debido a que el cociente no está definido, otra forma equivalente de representar la integral es la siguiente

$$\int x^{-1}.dx = \int \frac{1}{x}dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo y la definición de logaritmo natural sabemos que la derivada de $Ln(x) = \frac{1}{x}$, por lo que la integral de $\frac{1}{x}$ es un logaritmo natural, quedando la fórmula de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = Ln|x| + C$$

De la misma manera para una función compuesta tenemos

$$\int \frac{du}{u} = Ln|u| + C$$

Ejemplo 1. Integrar $\int \frac{x}{x^2+2}dx$

Al hacer el análisis de la integral parece factible resolverla con la fórmula de logaritmo natural puesto que el numerador de la fracción se aproxima a la derivada de la función compuesta u que se encuentra en el denominador.

$$\int \frac{x}{x^2+2}dx$$

Primero identificamos u y derivamos

$$u = x^2 + 2$$
$$du = 2x.dx$$

Completamos la integral puesto que en la derivada hace falta un 2

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$$

Completa la integral, escribimos en términos de u

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

Integramos $\frac{1}{2}Ln|u|+C$

Finalmente escribimos la respuesta en términos de x $\frac{1}{2}Ln|x^2+2|+C$

Ejemplo 2. Integrar $\int \frac{2x^2}{x^3-10}dx$

De igual manera que el ejemplo anterior el numerador se aproxima a la derivada del denominador, observa

$$u = x^3 - 10$$
$$du = 3x^2.dx$$

La derivada es $3x^2.dx$ entonces el procedimiento para completar es sacar de la integral la constante 2 y escribir el 3, de la siguiente manera

$$= 2\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-10}dx$$

Completa la integral reescribimos en términos de u

$$= \frac{2}{3}\int \frac{du}{u}$$

Resolvemos la integral

$$= \frac{2}{3}Ln|u|+C$$

Finalmente escribimos en términos de x $= \frac{2}{3}Ln|x^3-10|+C$

EJERCICIO 10 Integrales que generan logaritmos naturales $\int \frac{du}{u}$

Utilizando la fórmula del logaritmo natural hallar la integral indefinida (NOTA: No todas se resuelven con la fórmula $\int \frac{du}{u}$)

1. $\int \frac{1}{2x+1}\,dx$

2. $\int \frac{1}{8x-5}\,dx$

3. $\int \frac{1}{3-2x}\,dx$

4. $\int \frac{12}{6x+1}\,dx$

5. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

6. $\int \frac{x^2}{3-x^3}\,dx$

7. $\int \frac{x^2 - 4}{x} dx$

10. $\int \frac{x+3}{x^2 + 6x + 7} dx$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

11. $\int \frac{\cos 2x}{sen 2x} dx$

9. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 9x} dx$

12. $\int \frac{3t}{2t^2 + 8} dt$

Formula de la función exponencial $\int e^u.du = e^u + c$

La integral de la función e^u nos da por resultado la misma función más la constante de integración,

pero el detalle radica en identificar y comprobar que la integral este completa, es decir, una vez identificada la variable u , en la integral debe estar también su derivada

La función compuesta u es el exponente de e y la cual tenemos que identificar para encontrar su derivada.

Analiza las siguientes integrales…

a) $\int e^{2x}.dx$ b) $\int x.e^{2x}.dx$ c) $\int x.e^{x^2}.dx$

¿En cuál de ellas es aplicable la formula? $\int e^u.du = e^u + c$

Por supuesto identificando a la función u y derivando encontramos que aplica para a) y c): observa

$u = 2x$ $du = 2.dx$	$u = 2x$ $du = 2.dx$	$u = x^2$ $du = 2x.dx$
En la primera integral solamente completamos un valor numérico 2	En la segunda integral la formula no aplica porque la derivada de u es 2 y sale sobrando una variable x	En la tercera integral solamente completamos un valor numérico 2

EJERCICIO 11 Integrales de la función exponencial $\int e^u du$

En los siguientes ejercicios encuentra la integral logarítmica de base e

NOTA: no todas requieren la fórmula de logaritmos exponencial $\int e^u du$

1. $\int e^{10t}\,dt$

2. $\int e^{5x}\,dx$

3. $\int 5xe^{-x^2}dx$

4. $\int e^{-x^4}\left(-4x^3\right)dx$

5. $\int e^{-2x}dx$

6. $\int e^{1-x}dx$

7. $\int senx.e^{\cos x}dx$

8. $\int 3t.e^{2t^2}dt$

9. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$

10. $\int_{1}^{3} x.e^{x^2}\,dx$

11. $\int_{0}^{4} xe^{-x^2}\,dx$

12. $\int e^{x}\sqrt{1+e^{x}}\,dx$

13. $\int \left(e^{2x}+3\right)^{4} e^{2x}\,dx$

14. $\int xe^{-8x^2}\,dx$

Integrales trigonométricas

Ejemplo 1 $\int Sen\ 3x.dx$

$u = 3x$
$du = 3.dx$

$-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

Ejemplo 2 $\int x.Cos\ 5x^2.dx$

$u = 5x^2$
$du = 10x.dx$

$\frac{1}{10}\int 10x.Cos5x^2.dx = \frac{1}{10}\int Cos\ u.du = \frac{1}{10}Sen\ u + C$

$\frac{1}{10}Sen\ 5x^2 + C$

Ejemplo 3 $\int 5x.Tan\ 3x^2.dx$

$u = 3x^2$
$du = 6x.dx$

$\frac{5}{6}\int 6x.Tan\ 3.dx = \frac{5}{6}\int Tan\ u.du = \frac{5}{6}Ln|\mathrm{Sec}\,u| + C$ $\frac{5}{6}Ln|\mathrm{Sec}\,3x^2| + C$

Ejemplo 4 $\int (3x^2 + Cos\ 4x - 3.Sen\ 2x).dx$

$3\int x^2.dx + \int Cos\ 4x.dx - 3\int Sen\ 2x.dx$

$u = 4x$ $u = 2x$

$du = 4.dx$ $du = 2.dx$

$\frac{3x^3}{3} + \frac{1}{4}Sen\ 4x + \frac{3}{2}Cos\ 2x + C$

EJERCICIO 12 Integrales de funciones trigonométricas

1. $\int (Sen\ 5x + Cos\ 9x)dx$
2. $\int (Tan\ 10x + Sec\ x + 2)dx$
3. $\int Sec^2\ 2x. dx$
4. $\int 5x. Sec^2\ 5x^2. dx$
5. $\int (6x + 3e^{4x})dx$
6. $\int (Sec\ 5x + Tan\ 5x)dx$

7. $\int (5Sen\ 3x + 4Cos\ 6x)dx$

8. $\int (Sen\ 5x + Cos\ 9x)dx$

9. $\int (x^2 Csc\ x^3 + 9x^2)dx$

10. $\int Sen^3 6x.\, dx$

Integración por partes.

En esta sección estudiaremos una técnica muy importante de integración llamada integración por partes. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de integrales y es particularmente eficaz para integrandos donde aparecen productos de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, funciona muy bien para resolver integrales como

$\int x\ln x.dx$, $\int x^2e^x dx$ y $\int e^x senx.dx$

Fórmula de integración por partes.

Si u y v son funciones de x con derivadas continuas,

$$\int u.dv = uv - \int v.du$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv , puede ocurrir que la segunda integral sea más fácil que la original.

Estrategias para integrar por partes.

1. Intente tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajusta a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intente tomar como u la porción de integrando cuya derivada es una función mas simple que u y como dv el factor restante del integrando.

Integrales comunes resolubles mediante integración por partes

1. En integrales de los tipos

$\int x^n e^{ax}dx,\quad \int x^n sen(ax)dx$ o $\int x^n \cos(ax)dx$

Hacer $u = x^n$ y $dv = e^{ax}dx$, $sen(ax)dx$ o $\cos(ax)dx$

2. En integrales de los tipos

$\int x^n \ln x dx,\quad \int x^n arcsen(ax)dx,$ o $\int x^n \arctan(ax)dx$

Hacer $u = \ln x$, $arcsen(ax)$ o $\arctan(ax)$ y $dv = x^n dx$

3. En integrales de los tipos

$\int e^{ax} sen(bx)dx$ o $\int e^{ax}\cos(bx)dx$

Ejemplo 1

Resolver la integral $\int x.e^{2x}dx$

Solución: este ejemplo es digno de aplicar la formula de integración por partes dado que se trata de una multiplicación de una función algebraica por una función logarítmica. Tenemos varias formas de elegir la composición:

$\int \underbrace{(x)}_{u}\underbrace{(e^{2x}dx)}_{dv}$ $\qquad$ $\int \underbrace{(e^{2x})}_{u}\underbrace{(x.dx)}_{dv}$ $\qquad$ $\int \underbrace{(1)}_{u}\underbrace{(x.e^{2x}dx)}_{dv}$ $\qquad$ $\int \underbrace{(x.e^{2x})}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$

La estrategia invita a elegir la primera opción ya que la derivada de $u = x$ es más simple que x y además $dv = e^{2x}dx$, es la parte más complicada del integrando que se adapta a una regla básica de integración.

$$\int x.e^{2x}.dx =$$

$u = x \qquad\qquad dv = e^{2x}$

$du = dx \qquad\qquad v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$

Aplicando la fórmula: $\int u.dv = uv - \int v.du$ tenemos:

$$\int x.e^{2x}.dx =$$

$$= x\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\boxed{= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

Ejemplo 2. **Hallar** $\int x^2 \ln x.dx$

Solución: en este caso, x^2 es más fácil de integrar que $\ln x$. Además la derivada de $\ln x$ es más sencilla que $u = \ln x$. Por tanto, tomamos $dv = x^2 dx$.

$$\int x^2 \ln x.dx$$

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ $\qquad$ $v = \frac{x^3}{3}$

Al utilizar la fórmula: $\int u.dv = uv - \int v.du$ tenemos:

$$\int x^2 \ln x.dx =$$

$$= \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \int x^3 \left(\frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

$$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Ejemplo 3: Hallar $\int x^2 sen3x.dx$

Solución: los factores x^2 y $sen3x$ son igualmente fáciles de integrar, pero la derivada de x^2 es más simple que la propia función mientras que la derivada de $sen3x$ no lo es. En consecuencia optamos por tomar $u = x^2$

$\int x^2 sen3x.dx$ $\qquad$ Al utilizar la fórmula:

$u = x^2$ $\qquad$ $dv = sen3xdx$

$du = 2x.dx$ $\qquad$ $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$

$$\int u.dv = uv - \int v.du$$

tenemos:

$$x^2\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\int \cos 3x\,(2x)\,dx =$$

$$=-\frac{x^2}{3}\cos 3x+\left(\frac{1}{3}\right)(2)\int x.\cos 3x.dx =$$

Observamos que nos queda otra integral a la que tenemos que aplicar nuevamente la fórmula de integración por partes

$$u = x \qquad dv = \cos 3x dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3} sen 3x$$

$$=-\frac{x^2}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\int x.\cos 3x.dx =$$

$$=\frac{x^2}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\left[\frac{x}{3} sen3x-\frac{1}{3}\int sen3x.dx\right]=$$

$$=\frac{x^2}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\left[\frac{x}{3} sen3x-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\right]=$$

$$=\frac{x^2}{3}\cos 3x+\frac{2x}{9} sen3x+\frac{2}{27}\cos 3x + C$$

EJERCICIO 12 INTEGRACION POR PARTES

Resolver las siguientes integrales utilizando la fórmula de integración por partes (**nota**: no todas se resuelven con la técnica de integración por partes)

1. $\int xe^{5x}dx$

2. $\int xe^{8x}dx$

3. $\int \ln 2x.dx$

4. $\int \ln\ x^3dx$

5. $\int \ln 3x.dx$

6. $\int 4x.sen3x.dx$

7. $\int 2x.\cos 5x.dx$

10. $\int x^2 e^{x^3} dx$

8. $\int xe^{-3x} dx$

11. $\int x^3 \ln x.dx$

9. $\int \frac{x}{e^{3x}} dx$

12. $\int 2x.\cos 4x dx$

Integral de funciones trigonométricas inversas

Cuando en una integral aparecen funciones derivadas del teorema de Pitágoras se utilizan formulas especiales que generan funciones trigonométricas inversas que pueden servir como soluciones a muchos problemas. Entre las fórmulas más comunes tenemos las siguientes.

FORMULAS BÁSICAS

1. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$

2. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+u}{a-u} + C$

3. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln \frac{u-a}{u+a} + C$

4. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsen \frac{u}{a} + C$

5. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = Ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$

6. $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} arcsen \frac{u}{a} + C$

7. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} Ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$

8. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arcsen \frac{u}{a} + C$

Ejemplo 1 $\int \frac{dx}{4x^2+9} =$

$u^2 = 4x^2$
$u = 2x$
$du = 2.dx$

$a^2 = 9$
$a = 3$

Se aplica formula 1

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{3} arctg \frac{2x}{3} + C$$

Ejemplo 2 $\int \frac{3x}{\sqrt{x^4+16}} dx =$

$u^2 = x^4$
$u = x^2$
$du = 2x.dx$

$a^2 = 16$
$a = 4$

se aplica la fórmula 5

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^4+16}} dx = Ln\left(x^2 + \sqrt{x^4+16}\right) + C$$

EJERCICIO 13 integración de funciones trigonométricas inversas

1) $\int \frac{dx}{x^2+9}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

3) $\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}}$

4) $\int \frac{dx}{9x^2-4}$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

6) $\int \frac{dx}{9x^2-1}$

7) $\int \frac{dt}{4-9t^2}$

8) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

9) $\int \frac{\cos\theta \, .d\theta}{4-sen^2\theta}$

10) $\int \frac{5x.dx}{\sqrt{1-x^4}}$

11) $\int \frac{3x.dx}{x^4+25}$

12) $\int \frac{dy}{\sqrt{9y^2+4}}$

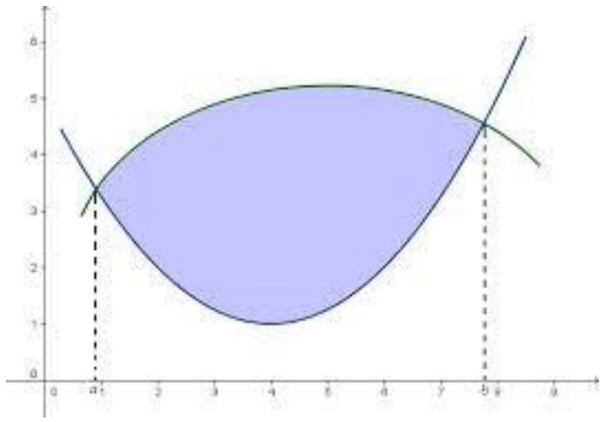
Aplicaciones de las integrales.

Es difícil encontrar una disciplina donde no se apliquen las integrales en la solución de problemas, ya que el área debajo de la curva de la función puede representar una solución concreta, lo mismo puede representar una distancia, cantidad de energía, un muestreo poblacional, una cantidad de dinero, una velocidad una fuerza, etc…

La integral es un método rápido para resolver problemas donde se involucre una sumatoria de términos de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,dx$, donde $f(x).dx$ representa el área debajo de la curva de la función.

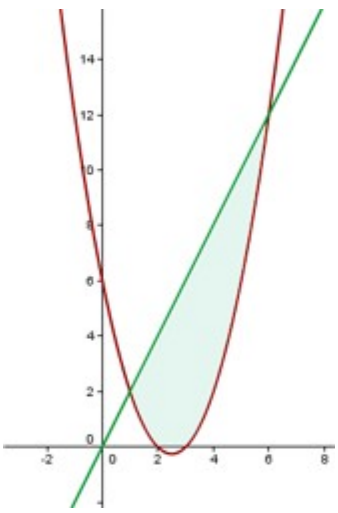
AREA ENTRE DOS FUNCIONES

Es el área de la función que está situada por encima, menos el área de la función que está situada por debajo.



$$\int_a^b \left[g(x)-f(x)\right]dx$$

Ejemplo 1 Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$



Primero encontramos los puntos de intersección de ambas gráficas

$$x^2 - 5x + 6 = 2x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-6)(x-1) = 0$$

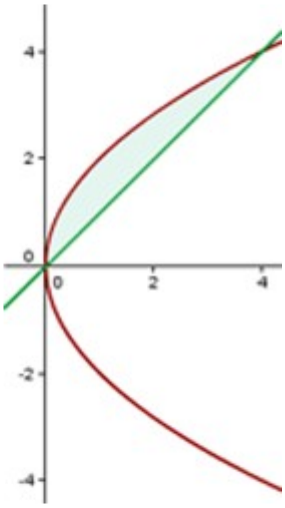
Por lo tanto los puntos de intersección están en

$x_1 = 1$ y $x_2 = 6$

$$\int_1^6 \left[2x-\left(x^2-5x-6\right)\right]dx =$$

$$\int_1^6 \left[-x^2+7x+6\right]dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x^2-6x\Big|_1^6 = 20.83$$

Ejemplo 2 Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$



La intersección de ambas gráficas se obtiene igualando las funciones

$$\sqrt{4x} = x$$

$$4x = x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x\left(x-4\right) = 0$$

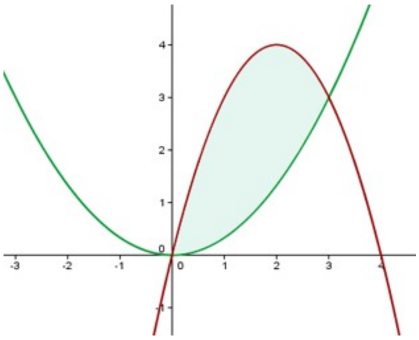
Por lo tanto los puntos de intersección están en

$x_1 = 0$ y $x_2 = 4$

$$\int_0^4 \left[2x^{1/2} - x\right]dx = \int_0^4 2x^{1/2}dx - \int_0^4 x\,dx$$

$$\frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \left[\frac{4\left(4\right)^{3/2}}{3} + \frac{4^2}{2}\right] - \cancel{\left[\frac{4\left(0\right)^{3/2}}{3} + \frac{0^2}{2}\right]} = 18.66 \text{ u}^2$$

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.


-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1

Integración por fracciones simples.

Un polinomio en *x* es una función de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, donde *a* es una constante, con $a_0 \neq 0$, y *n,* que se llama el *grado* del polinomio, un entero no negativo.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos teóricamente) como producto de factores reales lineales del tipo $ax+b$ y factores reales cuadráticos irreducibles del tipo ax^2+bx+c . (Un polinomio de grado 1 o mayor se dice *irreducible* si no puede ser factorizado en polinomios de grados más bajos.) Por la fórmula cuadrática ax^2+bx+c, es irreducible si y sólo si $b^2-4ac>0$. (En este caso, las raíces de $ax^2+bx+c=0$ no son reales.)

Ejemplo 1: *(a)* x^2-x+1 es irreducible, ya que $(1)^2-4(1)(1)=$ -3 < 0.

(b) x^2-x-1 no es irreducible, porque (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0.

Una función *F(x) = f(x)/g(x),* donde *f(x)* y *g(x)* son polinomios, se llama una *función racional.*
Si el grado de *f(x)* es menor que el de *g(x),* se dice que *F(x)* es *propia;* en caso contrario, se llama *impropia.*

Una función racional impropia puede expresarse como suma de un polinomio y una función racional propia. ASI, por ejemplo, $\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$

Toda función racional propia puede expresarse (al menos teóricamente) como suma de fracciones más simples *(fracciones simples)* cuyos denominadores son de la forma $(ax+b)^n$ y $(ax^2+bx+c)^n$, siendo *n* un entero positivo. Dependiendo de la naturaleza de los factores del denominador, pueden presentarse cuatro casos.

CASO I: FACTORES LINEALES DISTINTOS

A cada factor lineal $(ax+b)$ que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional propia le corresponde una sola fracción simple de la forma $\frac{A}{ax+b}$, donde *A* es una constante que habrá que determinar.

Ejemplo $\int \frac{2}{x^2-16}dx$

Factorizamos el denominador

$\int$

$$\int \frac{2}{x^2-16}dx = \frac{2}{(x-4)(x+4)}dx$$

Como hay dos factores se descompone en dos fracciones simples

$$\frac{2}{(x-4)(x+4)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+4}$$

Para encontrar los valores de A y B se multiplica toda la expresión por el mcm $(x-4)(x+4)$

$$2=A(x+4)+B(x-4)$$

Dar valores a x, de tal manera que se elimine una variable, por ejemplo si $x=4$

$$2=A(4+4)+\underline{B(4-4)}$$

$$2=A(8)$$

$$A=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

De la misma manera si $x=-4$

$$2=\underline{A(-4+4)}+B(-4-4)$$

$$2=B(-8)$$

$$B=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

Se sustituyen los valores encontrados de A y B y se resuelve la integral aplicando las formulas conocidas

$$\int\frac{2}{x^2-16}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-4}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+4}$$

$$\frac{1}{4}Ln|x-4|-\frac{1}{4}Ln|x+4|+C$$

CASO II: FACTORES LINEALES REPETIDOS

A cada factor lineal *ax + b* que aparezca *n* veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de *n* fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde *A* es una constante que habrá que determinar.

Ejemplo $\displaystyle\int\frac{3x}{(x-2)^2}\,dx=$

Factorizamos el denominador

$$\int\frac{3x}{(x-2)^2}\,dx=\int\frac{3x}{(x-2)(x-2)}\,dx$$

Como hay dos factores repetidos le corresponde dos fracciones simples de la forma

$$\frac{3x}{(x-2)(x-2)}=\frac{A}{x-2}\square\frac{B}{(x-2)^2}$$

Para encontrar los valores de A y B se multiplica toda la expresión por el mcm $(x-2)(x-2)$

$$3x=A(x-2)+B$$

Dar valores a x, de tal manera que se elimine una variable, por ejemplo si $x=2$

$$3(2)=\underline{A(2-2)}+B$$

$$6=B$$

$$B=6$$

De la misma manera si $x=0$

$$\underline{3(0)} = A(0-2) + B$$

$$0 = A(-2) + 6$$

$$A = \frac{6}{2} = 3$$

Se sustituyen los valores encontrados de A y B y se resuelve la integral aplicando las formulas conocidas

$$\int \frac{3x}{(x-2)^2}dx = 3\int \frac{dx}{x-2} + 6\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

En la primera integral aplica la formula $\int \frac{du}{u}$

En la segunda aplica la fórmula de la potencia $\int u^n du$

$$3Ln|x-2| + 6\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C$$

$$3Ln|x-2| - \frac{6}{x-2} + C$$

EJERCICIO 14 INTEGRACION POR FRACCIONES SIMPLES CASO I Y II

Resolver las siguientes integrales por el método de fracciones simples (Caso I y II)

1. $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$

2. $\int \frac{1}{x^2 + 7x + 6} dx$

3. $\int \frac{x}{x^2 - 3x - 4} dx$

4. $\int \frac{3x}{x^2 - 2x - 8} dx$

5. $\int \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx$

CASO III: FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

A cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional propia le corresponde una sola fracción Simple de la forma

$\frac{A_1x + B}{ax^2 + bx + c}$, donde *A* y *B* son constantes a determinar.

Ejemplo 1. Encontrar la solución de la siguiente integral

$$\int \frac{8x^3 + 47x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$$

$$\frac{8x^3 + 47x}{\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 9\right)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}$$

Multiplicando por el mcm

$$8x^3 + 47x = \left(Ax + B\right)\left(x^2 + 9\right) + \left(Cx + D\right)\left(x^2 + 4\right)$$

$$8x^3 + 47x = \underline{A}x^3 + 9Ax + \underline{\underline{B}}x^2 + 9B + \underline{C}x^3 + 4Cx + \underline{\underline{D}}x^2 + 4D$$

Igualando coeficientes tenemos…

$$A + C = 8$$
$$B + D = 0$$
$$9A + 4C = 47$$
$$9B + 4D = 0$$

Despejando A de la ecuación 1 y sustituyendo en 3

$$A = 8 - C \qquad 9\left(8 - C\right) + 4C = 47$$

$$72 - 9C + 4C = 47 \qquad A = 8 - 5$$

$$\boxed{C = 5} \qquad \boxed{A = 3}$$

Despejando B de la ecuación 2 y sustituyendo en 4

$$B = -D \qquad 9\left(-D\right) + 4D = 0$$

$$5D = 0 \qquad\qquad B = 0$$

$$\boxed{D = 0} \qquad\qquad \boxed{A = 0}$$

$$\int \frac{3x+0}{x^2+4}dx + \int \frac{5x+0}{x^2+9}dx$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{x}{x^2+4}dx + \frac{5}{2}\int \frac{x}{x^2+9}dx =$$

$$\frac{3}{2}Ln\left|x^2+4\right| + \frac{5}{2}Ln\left|x^2+9\right| + C$$

CASO IV: FACTORES CUADRATICOS REPETIDOS

A cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + e$ que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1x+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

Donde *A* Y *B* son constantes a determinar.

EJERCICIO 15 INTEGRACION POR FRACCIONES PARCIALES CASOS III Y IV

Resolver las siguientes integrales por el método de fracciones simples. (Caso III y IV)

1. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$

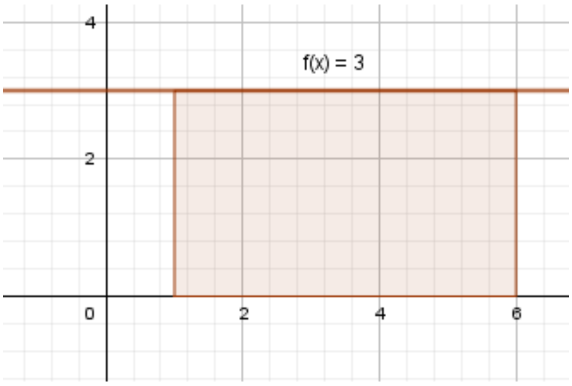
2. $\int \frac{3x^2 + 5x - 10}{x^3 + 5x} dx$

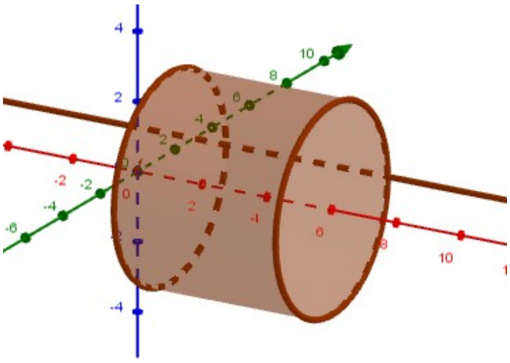
3. $\int \frac{x^2 + 5x + 9}{x^3 + 3x} dx$

4. $\int \frac{2x^3 - 2x}{x^3 + 3x} dx$

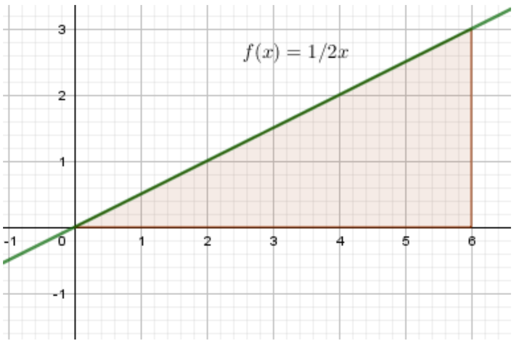
Volúmenes de sólidos de revolución.

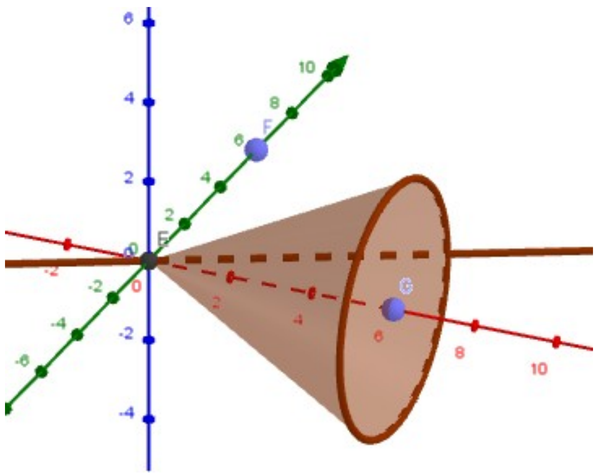
Un sólido de revolución es generado al girar un área plana en torno a una recta, llamada el eje de revolución, en el plano. Por ejemplo el área rectangular debajo de la gráfica de una función constante forma un cilindro al girarla en torno al eje x .





El área triangular debajo de una función lineal forma un cono al girarlo entorno al eje x





La integral es una herramienta muy poderosa para determinar el volumen de estos sólidos de revolución, aún tratandose de funciones mas complejas. Los metodos utilizados son los siguientes:

METODO DE LOS DISCOS.

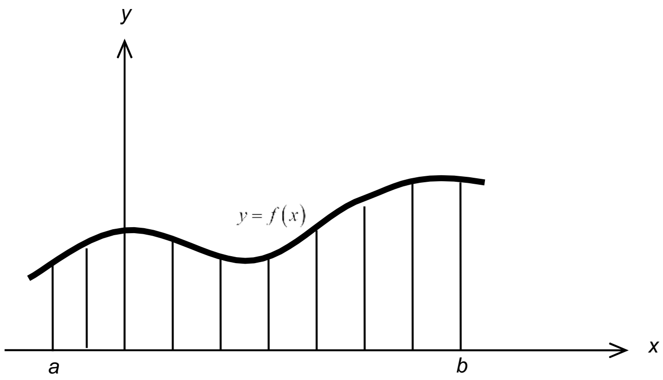
Este método es útil cuando el eje de rotación es parte del contorno del área plana.

1. Hacer un dibujo del área de una franja representativa perpendicular al eje de revolución del rectángulo aproximante.
2. Escribir el volumen del disco (o cilindro) generado al girar un rectángulo aproximante en torno al eje de revolución y sumar para los n rectángulos.
3. Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.

Cuando el eje de revolución es el eje x, y la frontera superior del área plana viene dada por una curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ ver figura.

El volumen V del sólido de revolución viene dado por

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



Análogamente, cuando el eje de rotación es el eje y y un lado del área plana viene dada por la curva $x = g(y)$ entre $y = c$ e $y = d$, el volumen V del sólido de revolución es

$$V = \int_c^d \pi x^2 dy = \pi \int_c^d \left[g(y) \right]^2 dy$$

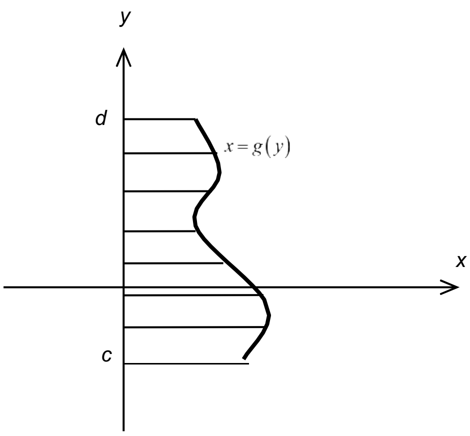


FIGURA 2.2

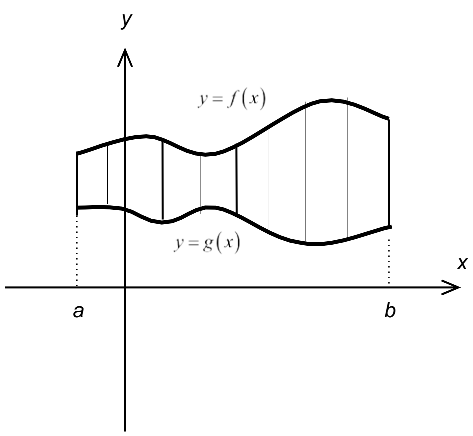


FIGURA 2.3

METODO DE LAS ARANDELAS.

Este método es útil cuando el eje de revolución no es parte del contorno del área plana.

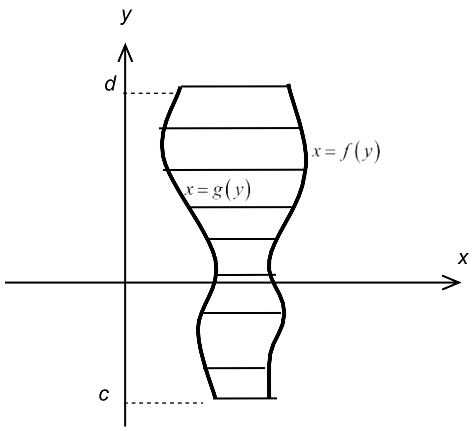
1. Igual que el paso uno del método de los discos
2. Prolongar los lados del rectángulo aproximante $ABCD$ hasta alcanzar el eje de revolución en los puntos E y F, como en la figura 2.9. Cuando el rectángulo aproximante se hace girar en torno al eje de revolución se forma una arandela cuyo volumen es la diferencia entre los volúmenes generados al girar los rectángulos $EABF$ y $ECDF$ en torno al eje. Escribir la diferencia de los dos volúmenes y proceder como el paso dos del método de los discos.
3. Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.

Si el eje de revolución es el eje x, la frontera superior del área plana viene dada por $y = f(x)$, la inferior por $y = g(x)$ y la región va desde $x = a$ hasta $x = b$ figura 2.3, entonces el volumen V del sólido de revolución viene dado por

$$V = \pi \int_a^b \left\{ \left[f(x) \right]^2 - \left[g(x) \right]^2 \right\} dx$$

Análogamente, si el eje de rotación es el eje y y el área plana esta limitada a la derecha por $x = f(y)$, a la izquierda por $x = g(y)$, superiormente por $y = d$ e inferiormente por $y = c$ figura 2.4, entonces el volumen V viene dado por

$$V = \pi \int_c^d \left\{ \left[f(y) \right]^2 - \left[g(y) \right]^2 \right\} dy$$



Ejemplo. Hallar el volumen generado al girar el área del primer cuadrante acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y su latus rectum $(x = 2)$ en torno al eje x .

Dividimos el área plana verticalmente, como se ve en la figura 2.7 con el rectángulo aproximante se hace girar en torno al eje x , se genera un disco de radio y , altura Δx y volumen $\pi y^2 \Delta x$. La suma de los volúmenes de los n discos correspondientes a los n rectángulos aproximantes es $\sum \pi y^2 \Delta x$ y el volumen requerido es

$$V = \int_a^b dV = \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 8x.dx = 4\pi x^2 \Big|_0^2 = 16\pi \text{ Unidades}$$

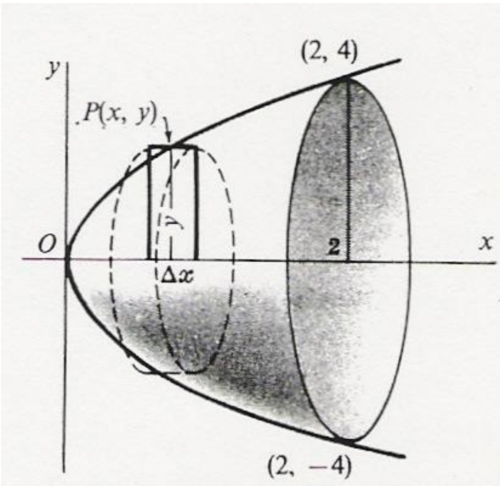


Fig. 2.7

Ejemplo. Hallar el volumen generado al girar el área acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y su latus rectmun $(x = 2)$ en torno al eje y.

Dividimos el área plana horizontalmente. Como se ve en la figura 2.9. Cuando el rectángulo aproximante se hace girar en torno al eje y, genera una arandela cuyo volumen es la diferencia entre los volúmenes generados al girar el rectángulo $ECDF$ (de dimensiones 2 por Δy) y el rectángulo $EAFB$ (de dimensiones x por Δy) en torno al eje y, esto es, $\pi(2)^2 \Delta y - \pi\left(x^2\right)\Delta y$. El volumen pedido es por tanto

$$V = \int_{-4}^{4} 4\pi\, dy - \int_{-4}^{4} \pi x^2\, dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - x^2\right) dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{64}\right) dy =$$

$$= \frac{128}{5}\pi \text{ Unidades.}$$

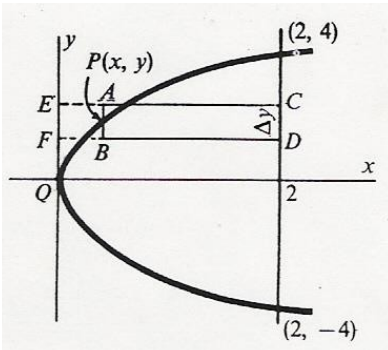


Fig. 2.8

EJERCICIO AREA ENTRE DOS GRAFICAS 16

Calcular el área comprendida entre cada pareja de curvas.

1. $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ entre $x = 0$ y $x = 1$

2. $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$

3. $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 0$

4. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ y $g(x) = x + 8$

EJERCICIO SOLIDOS DE REVOLUCION METODO DE LOS DISCOS 17

En los Problemas 1 a 6, hallar el volumen generado al hacer girar el área plana dada en torno a la recia que se indica. Usando el método de los discos (Dibuja la gráfica).

1. $y = 2x^2$, en torno al eje x y entre *x* = 0, y *x* = 5; en torno al eje *x.*
Solución: 2500π .

2. $x^2 - y^2 = 16$, en torno al eje x y entre x = 4 y *x* = 8.
Solución: $256\pi / 3$

EJERCICIO 18

En los Problemas 7 al 11, hallar el volumen generado al hacer girar el área plana dada en torno a la recta que se indica, usando el método de las arandelas.

3. Interior a $y = 2x^2$, $y = 0, x = 0, x = 5$; en torno al eje y.
Solución: 625π

4. Interior a $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0, x = 8$; en torno al eje y.

Solución: $128\sqrt{3}\pi$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES E INTEGRALES DIRECTAS

1)	$\int k.dx = k.x + C$	Integral de una constante por una función
2)	$\int dx = x + C$	Integral de la diferencial dx
3)	$\int (u + v - w).dx = \int u.dx + \int v.dx - \int w.dx$	Integral de una suma o resta de funciones
4)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	Integral de la potencia de x si $n \neq -1$
5)	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	
6)	$\int e^x dx = e^x + C$	

INTEGRALES COMPUESTAS Y TRIGONOMÉTRICAS

Formulas aplicadas a las funciones compuestas $f(x) = u$

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$

3. $\int e^u du = e^u + C$

TRIGONOMÉTRICAS

4. $\int senu.du = -\cos u + C$

5. $\int \cos u.du = sen.u + C$

6. $\int \tan u.du = Ln\left|\sec u\right| + C$

7. $\int \cot u.du = Ln\left|sen.u\right| + C$

8. $\int \sec u.du = Ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$

9. $\int \csc u.du = Ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$

10. $\int \sec u.\tan u.du = \sec u + C$

11. $\int \sec^2 u.du = \tan u + C$

12. $\int \csc u.\cot u.du = -\csc u + C$

13. $\int \csc^2 u.du = -\cot u + C$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

9. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$

10. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+u}{a-u} + C$

11. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} Ln \frac{u-a}{u+a} + C$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen \frac{u}{a} + C$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = Ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$

14. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsen \frac{u}{a} + C$

15. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} Ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$

16. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arcsen \frac{u}{a} + C$

Integración por partes

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Teorema fundamental de cálculo

$$\int^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

a