Centro de Estudios Tecnológicos, Industrial y de Servicios No.1

"Coronel, Matilde Galicia Rioja"

GUIA DE ESTUDIO

PARA EXÁMEN EXTRAORDINARIO

CAMPO DISCIPLINAR: MATEMÁTICAS

ASIGNATURA*:* ***<u>GEOMETRÍA ANALÍTICA</u>***

Semestre Agosto 2021 – Enero 2022

RECOPILÓ:

PROF. ISMAEL GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

INTRODUCCIÓN

Esta guía tiene como finalidad suministrar los conceptos y ejercicios necesarios para una fácil comprensión de elementos contenidos en el programa de Geometría Analítica para el bachillerato tecnológico. Con el fin de facilitar el estudio de la materia a través de una recapitulación de temas con ejercicios resueltos y propuestos para la preparación de un examen extraordinario.

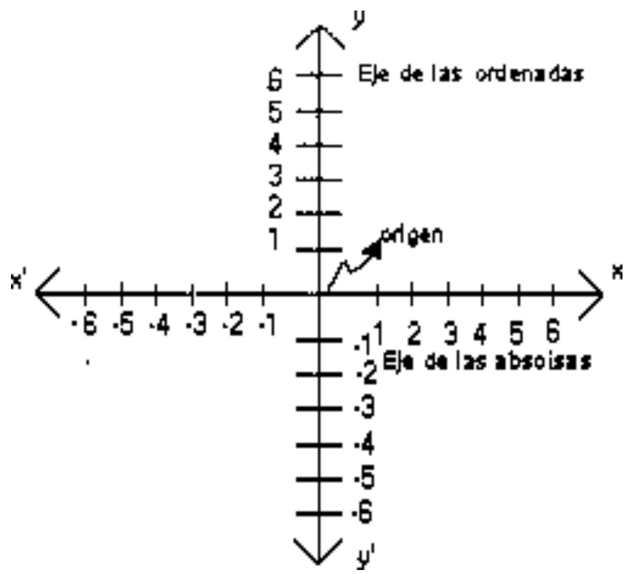
Se recomienda leer cuidadosamente los conceptos e identificar los elementos clave para la solución de ejercicios.

Es necesario que, después de realizar el análisis de cada ejercicio resuelto en ésta guía, se resuelvan los ejercicios propuestos, esto ayudará a aumentar la habilidad para la solución de los mismos.

Este compendio es un conjunto de temas y ejercicios recopilados de diferentes fuentes, tanto de trabajos de profesores de diferentes universidades, publicaciones en la web, así como de libros para bachillerato y de redacciones propias del compilador. Se encuentra estructurado de tal manera que el alumno lleve una continuidad de los temas abordados en clase y le sea útil para la presentación de su examen extraordinario.

EL PLANO CARTESIANO.

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las "yes", (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.



El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.

Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las 'X' y uno de las 'Y', respectivamente, esto indica que un punto se puede ubicar en el plano cartesiano con base en sus coordenadas, lo cual se representa como:

P (x, y)

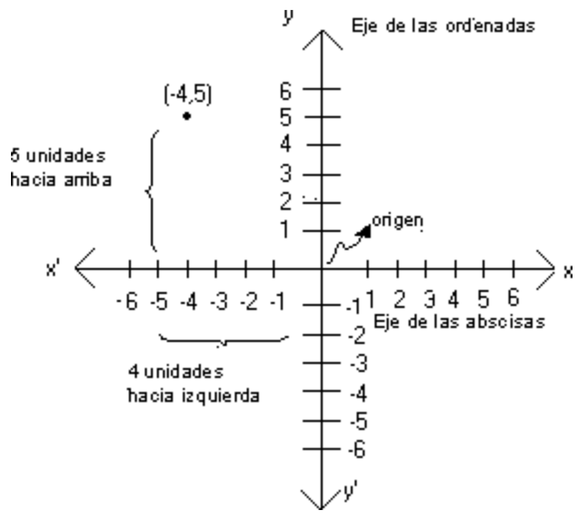
Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia a izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.

2. Desde donde se localiza el valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas sus coordenadas.

Ejemplo:

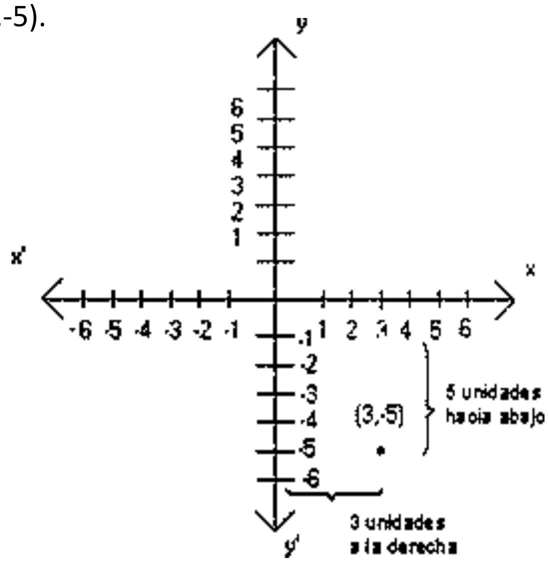
Localizar el punto A (-4, 5) en el plano cartesiano.



Este procedimiento también se emplea cuando se requiere determinar las coordenadas de cualquier punto que esté en el plano cartesiano.

Determinar las coordenadas del punto M.

Las coordenadas del punto M son (3,-5).



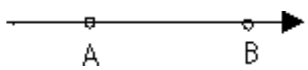
De lo anterior se concluye que:

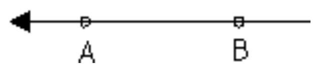
Para determinar las coordenadas de un punto o localizarlo en el plano cartesiano, se encuentran unidades correspondientes en el eje de las x hacia la derecha o hacia la izquierda y luego las unidades del eje de las y hacia arriba o hacia abajo, según sean positivas o negativas, respectivamente.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

1. INTRODUCCION

A los conceptos ya conocidos de segmento de recta; en este curso, es necesario agregar que un segmento de recta tiene su "SENTIDO" o "DIRECCIÓN". Un segmento de recta es generado por un punto en movimiento desde una posición inicial (origen) hasta una posición final (extremo). El sentido de un segmento se registra con una flecha que señala hacia el punto final o extremo como en las figuras.





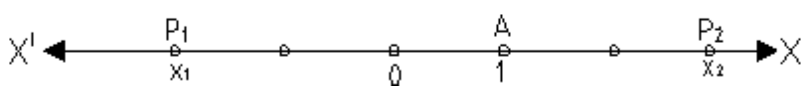
Si el segmento de A a B se considera "positivo", entonces el de B a A es "negativo".

2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos se define como el valor numérico (valor absoluto) de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos.

a). DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN UN SISTEMA COORDENADO LINEAL.

Un sistema coordenado lineal consta de una recta $x \neq x$ con dirección positiva de izquierda a derecha y un punto fijo 0 como en la figura.



En la figura la distancia de 0 a A es la unidad. Estando P_2 a la derecha de 0, el segmento $0P_2$ es de longitud positiva. $0P_1$ tiene longitud negativa.

La distancia "d" de un segmento como en la figura es:

$$d = |P_1 P_2| = |x_2 - x_1| = |3-(-2)| = |3+2| = |5| = 5$$

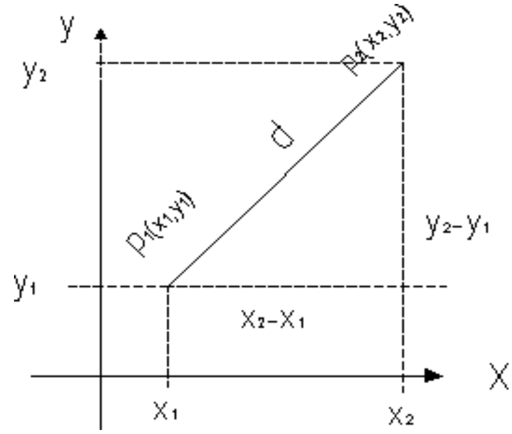
$$d = |P_2 P_1| = |x_1 - x_2| = |-2-3| = |-5| = 5; \qquad d = |5| = |-5| = 5$$

b). DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN UN PLANO CARTESIANO.
Un punto en un plano se representa por un par ordenado de números reales llamadas coordenadas (x, y); "x" es la abscisa y "y" es la ordenada.

DEDUCCIÓN DE LA FORMULA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

En la figura, la distancia entre los puntos P_1 y P_2 se determina empleando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 ; \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



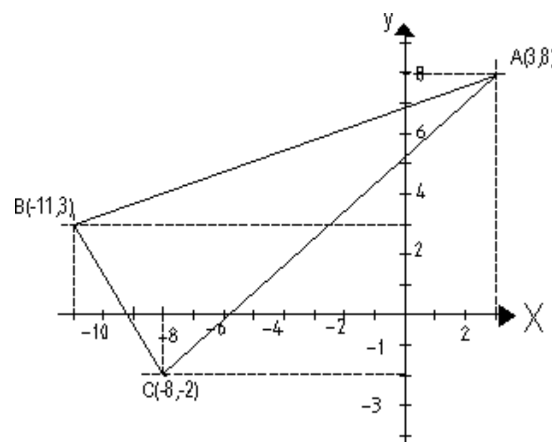
EJEMPLOS:

1.- Demostrar que los puntos : A(3, 8); B(-11, 3) y C(-8, -2) son vértices de un triángulo isósceles.

$$d_{AB} = \sqrt{(3+11)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{221}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-11+8)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(3+8)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{221}$$



Como AB = AC $\neq$ BC; el triángulo es isósceles.

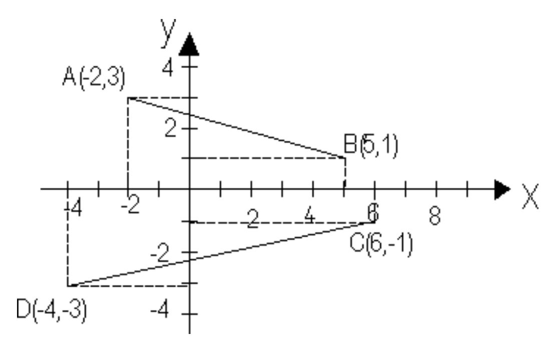
2.- Hallar la distancia entre:

a). A(-2,3) y B(5,1)

$$d_{AB} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{53}$$

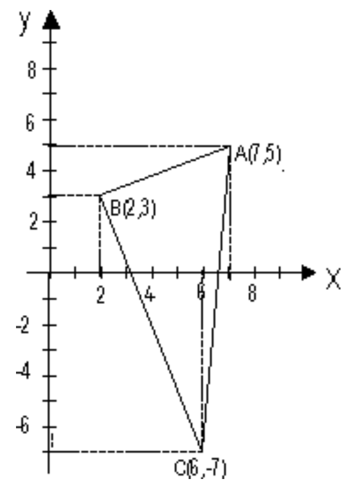
b). C(6, -1) y D(-4, -3)

$$d_{CD} = \sqrt{(-4-6)^2 + (-3-(-1))^2} = 2\sqrt{26}$$



3.- Demostrar que A(7,5), B(2,3) y C(6, -7) son vértices de un triángulo rectángulo.

$$d_{AB} = \sqrt{(2-7)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(6-2)^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(6-7)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$$



$AB^2 + BC^2 = AC^2$; $29 + 116 = 145$

El cuadrado de la hipotenusa (AC) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (AB y BC).

NOTA: Comprueba gráficamente este problema.

EJERCICIOS I

1) Hallar la distancia entre:
   a) A (4,1) y B (3,-2)
   b) C (-1,-5) y D (2,-3)

2) Determinar un punto que equidiste de: A (1,7); B (8,6) y C (7,-1)

3) Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: A(-3,-1); B(0,3); C(3,4) y D(4,-1)

4) Demostrar que :
   a) A (0,1); B (3,5); C (7,2) y D (4,-2) son vértices de un cuadrado.
   b) A (1,1); B (3,5); C (11,6) y D (9,2) son los vértices de un paralelogramo.

5) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a $\sqrt{13}$ es el punto A(-1, -5); si la abscisa del otro extremo es 2, hallar su ordenada (dos soluciones).

6) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos A (3,1) y B (-1, 1); hallar las coordenadas del tercer vértice (dos soluciones)

7) Hallar la longitud de las diagonales del paralelogramo que tiene como vértices los puntos: A (0,0); B (3,0); C (4,2) y D (1,2)

8) Demostrar que los puntos A (3,3); B (-3,-3) y C (-3 $\sqrt{3}$, 3 $\sqrt{3}$) son vértices de un triángulo equilátero.

9) Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son: A(-2, 5), B(4, 3) y C(7, -2).

10) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 10 es el punto A (-3, 6); si la abscisa del otro extremo es (3), hallar su ordenada (dos soluciones).

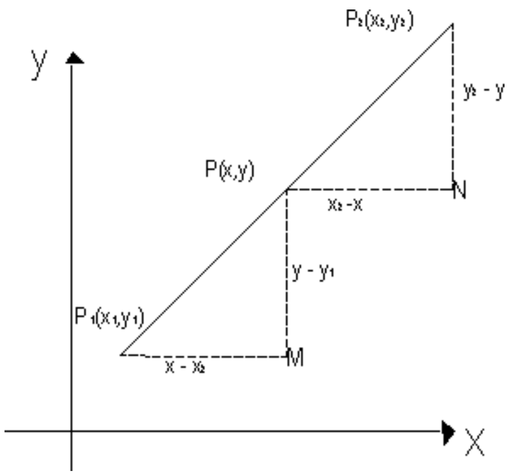
En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

1.- PUNTO DE DIVISIÓN

Es el punto que divide a un segmento en una determinada relación.

2.- VARIANTES DE PROBLEMAS DE LA DIVISIÓN DE UN SEGMENTO



En la división de un segmento en una razón dada se pueden presentar problemas en los que se ha de encontrar: El punto de división o la relación de división o algún punto de los extremos del segmento. Las fórmulas necesarias para la solución de estos problemas se encuentran a continuación: Teniendo en cuenta los triángulos semejantes de la figura.

$$\frac{P_1M}{PN} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{P_1P}{PP_2} = r$$ r es la razón;

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r; \qquad x - x_1 = (x_2 - x)r = r x_2 - r x$$

$$x + r x = r x_2 + x_1; \quad x(1 + r) = r x_2 + x_1$$

$$x = \frac{r x_2 + x_1}{1 + r}; \qquad \text{Análogamente:} \qquad y = \frac{r y_2 + y_1}{1 + r}$$

Si $P(x, y)$ es el punto medio de P_1P_2, $r = 1$

Entonces: $$x = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

EJEMPLOS:

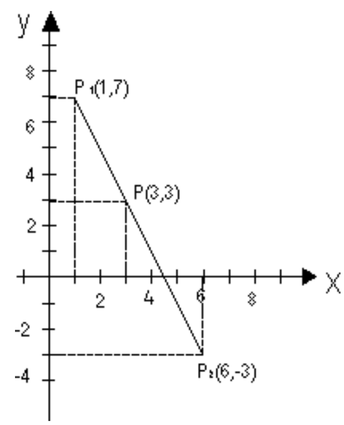
1.- Si se tiene $P_1(1, 7)$ y $P_2(6, -3)$ en la relación $r = \frac{2}{3}$; cuales son las coordenadas de P(x, y)

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(6)+1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{12}{3}+1}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{15}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{15}{5}$$

x = 3

$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-3)+7}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-6}{3}+7}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{15}{3}}{\frac{5}{3}}=3$$

y = 3

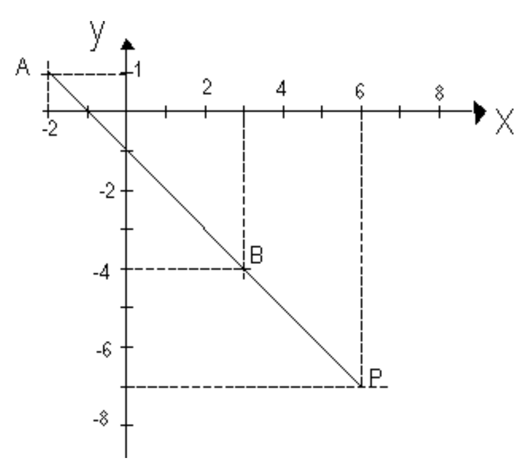


P(3, 3) es el punto buscado.

2.- Encontrar las coordenadas de P (x, y) que divide al segmento determinado por A(-2, 1) y B(3, -4) en una relación de $r=-\frac{8}{3}$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{-8}{3}(3)+(-2)}{1+\frac{-8}{3}}=\frac{\frac{-24}{3}-2}{-\frac{5}{3}}=\frac{-\frac{30}{3}}{-\frac{5}{3}}=\frac{-30}{-5}=6$$

$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{-8}{3}(-4)+1}{1+\frac{-8}{3}}=\frac{\frac{32}{3}+1}{-\frac{5}{3}}=\frac{\frac{35}{3}}{-\frac{5}{3}}=\frac{35}{-5}=-7$$



P (6, -7) es el punto buscado.

Como r es negativo, el punto P es "Exterior al segmento AB"

EJERCICIOS II

1) Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A (-2,3) y B (6,-3)

2) Uno de los extremos de un segmento es el punto B (7,8) y el punto medio es P (4,3); hallar el extremo A (x , y).

3) Los extremos de un segmento son los puntos A (7,4) y B (-1,-4); hallar la razón r en que P (1,-2) divide al segmento.

4) Los puntos medios de los lados de un triángulo son: P_1 (2,5); P_2 (4,2) y P_3 (1,1); hallar las coordenadas de los tres vértices.

5) El extremo del diámetro de una circunferencia de centro C (-4,1) es A (2,6); hallar las coordenadas B (x , y) del otro extremo

6) Hallar las coordenadas del extremo A (x , y) del segmento que une este punto con B (2,-2) sabiendo que el punto P (-4,1) está situado a una distancia de B igual a $\frac{3}{5}$ partes de la longitud total del segmento.

7) El extremo del diámetro de una circunferencia de centro C (7, -6) es A (2, 2); hallar las coordenadas B (x , y) del otro extremo.

8) Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A (8, 2) y B (-5, 7) en la razón $r = \frac{3}{4}$.

9) Hallar las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento formado por A (2, -4) y B (8, 12); determinar también el punto medio del segmento.

10) Se sabe que el punto P (8,- 4) divide al segmento que se determina por los puntos A (14,-12) y B (x_2 ,y_2) en la relación r = 2; hallar las coordenadas de B.

En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

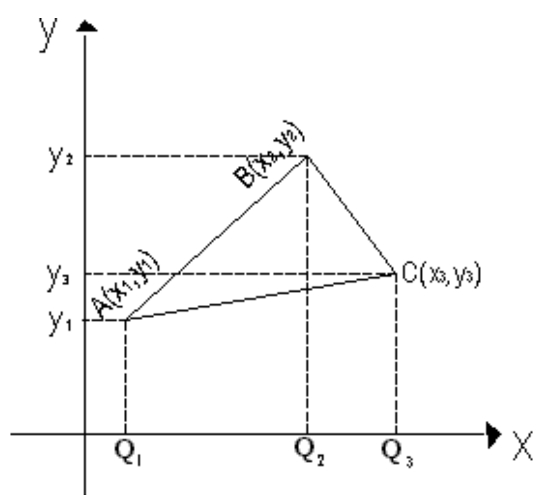
CONOCIDAS LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE LOS VÉRTICES, CALCULAR EL AREA DE TRIANGULOS

1.- DEFINICIÓN

El área de un triángulo es el semiproducto de la base (b) por la altura (h).

2.- AREA DE TRIANGULOS CONCIDOS LOS VÉRTICES

Mediante los conocimientos adquiridos sobre la distancia entre puntos y recordando que el área de un trapecio es el producto de la semisuma de sus base por la altura, a continuación se deduce la fórmula apropiada para el cálculo del área de triángulos, conocidas las coordenadas de los vértices.



En la figura, el área del triángulo ABC se puede determinar restando el área del trapecio Q_1Q_3CA de la suma de lasáreas de los trapecios Q_1Q_2BA y Q_2Q_3CB; esto es:

$$A = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_3 + y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)$$

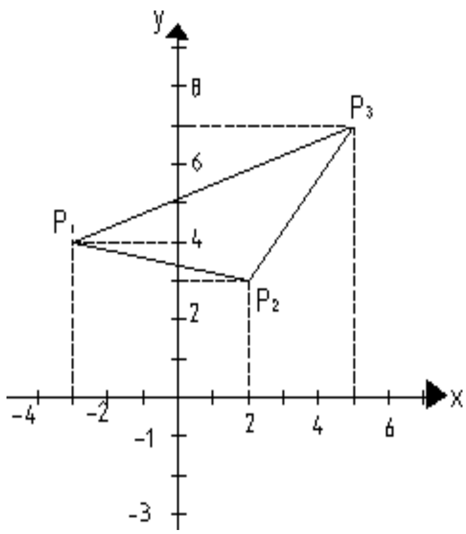
El área a calcular, se puede expresar con la fórmula siguiente:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1\right)$$

Si los vértices se ordenan en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el resultado será positivo; en caso contrario, será negativo.

EJEMPLOS:

1.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas $P_1(-3, 4)$, $P_2(2, 3)$ y $P_3(5, 7)$.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

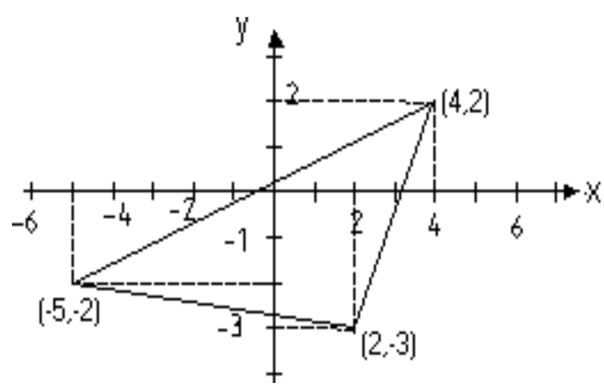
$$A = \frac{1}{2}\left((-3)(3)+(2)(7)+(5)(4)-(-3)(7)-(5)(3)-(2)(4)\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(-9+14+20+21-15-8\right)$$

A =11.5 Unidades de Superficie

2.- Encontrar el área del triángulo que tiene como coordenadas de los vértices: (2, -3), (4, 2) y (-5, -2)

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2}\left((-5)(-3)+(2)(2)+(4)(-2)-\right.$$
$$\left.-(-5)(2)-(4)(-3)-(2)(-2)\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(15+4-8+10+12+4\right)$$

A = 18.5 Unidades de Superficie

EJERCICIOS III

1) Encontrar el área de los triángulos que tienen como vértices los puntos:

a) A (-3,4); B (6,2) y C (4,-3)
b) A (-8,-2); B (-4,-6) y C (-1,5)
c) A (0,4); B (-8,0) y C (-1,-4)
d) A (2,2); B (-4,6) y C (4,-2)
e) A (a , b + c); B (b , c + a) y C (c , a + b)

En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

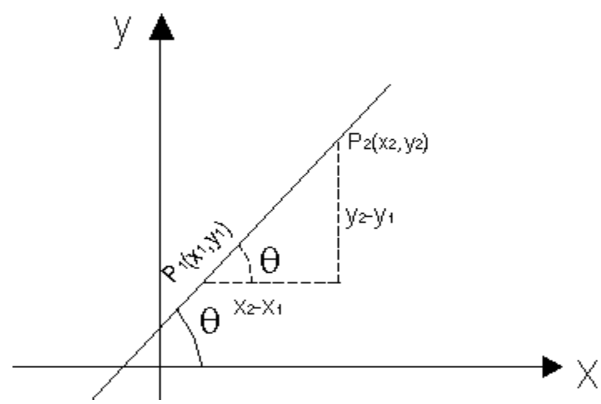
PENDIENTE Y/ O ANGULO DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA DADA

1.- ANGULO DE INCLINACIÓN

La inclinación de una recta es el menor de todos los ángulos que dicha recta forma con el semieje “x” positivo partiendo de “x” en el sentido inverso al movimiento de las manecillas de un reloj. Cuando la recta es paralela al eje “x” (en el sentido inverso al movimiento) la inclinación es cero.

2.- PENDIENTE

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo de inclinación.



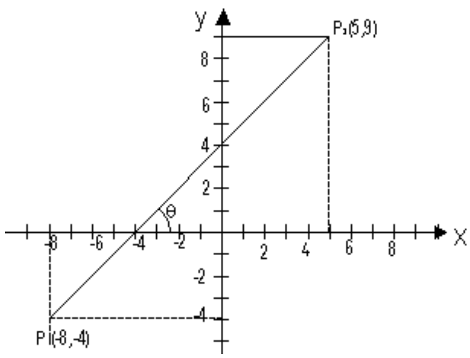
La pendiente de la recta de la figura que pasa por los puntos P_1 y P_2 es:

$$m = \tan\ \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Cualesquiera que sean los cuadrantes en que se encuentren P_1 y P_2.

EJEMPLOS:

1.- Encontrar la pendiente "m" y el ángulo de inclinación "θ" de la recta que pasa por $P_1(-8, -4)$ y $P_2(5, 9)$



$$m = \frac{9-(-4)}{5-(-8)} = \frac{13}{13} = 1$$

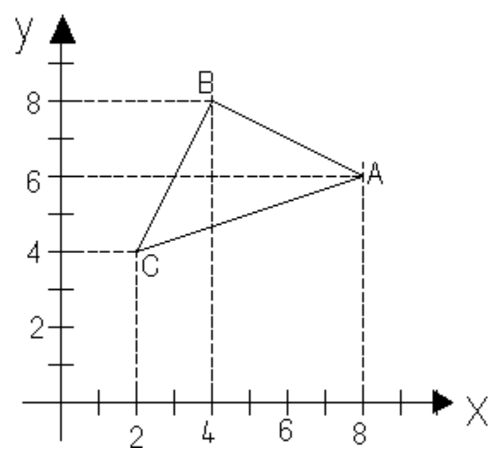
$$\theta = \text{arc tg } 1 = 45°$$

2.- Demostrar que los puntos A(8, 6), B(4, 8) y C(2, 4) son los vértices de un triángulo rectángulo.

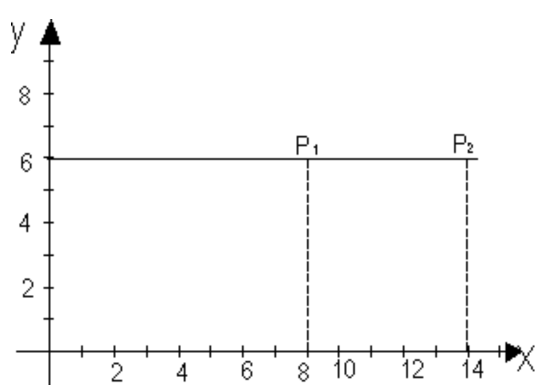
$$m_{AB} = \frac{8-6}{4-8} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2};$$

$$m_{BC} = \frac{4-8}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

2 es el reciproco de $\frac{1}{2}$ y son de signo contrario. Las pendientes de líneas rectas perpendiculares son recíprocas y de signo contrario. AB y BC son rectas perpendiculares (catetos del triángulo rectángulo ABC)



3.- Encontrar la pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(8, 6)$ y $P_2(14, 6)$



$$m = \frac{6-6}{14-8} = \frac{0}{6} = 0$$

$$0 = \text{arc tan } 0 = 0°$$

EJERCICIOS IV

1) Encontrar la pendiente “m” y el ángulo de inclinación “θ” de la recta que pasa por los puntos:
   a) A (10,-3) y B (14,-7)
   b) A (-11,4) y B (-11,10)
   c) A (1,6) y B (5,-2)
   d) A (-3,2) y B (7,-3)

2) Una recta de pendiente 3 pasa por el punto P (3,2), la abscisa de otro punto B de la recta es 4; encontrar la ordenada de B.

3) Una recta pasa por los puntos P (7,4) y Q (3,-6); hallar pendiente “m” y el ángulo de inclinación “θ” de dicha recta.

4) Trazar la recta que pasa por el punto A (-3,-2) y que tiene una pendiente de $\frac{4}{5}$.

5) El punto A de abscisa –4 esta sobre la recta cuya pendiente es $-\frac{4}{5}$ y que pasa por el punto B(1,-3); calcula la ordenada de A.

6) La pendiente de una recta que pasa por el punto P (2,7) es –2, también pasa por los puntosA (x,3) y B (6,y);encontrar la abscisa de A y la ordenada de B.

7) Una recta de pendiente - 2 pasa por el punto A (5,-2), la abscisa de otro punto B de la rectas es 1; encontrar la ordenada de B.

8) Una recta l_1 pasa por los puntos P (5, 3) y Q (-6, -4); otra recta l_2 pasa por el punto A (-3, 4) y el punto B cuya abscisa es 4, hallar la ordenada de B sabiendo que l_1 y l_2 son perpendiculares.

9) Demostrar por medio de pendientes, que los puntos A (3,-6), B (11, -5), C (9, 2) y D (1, 1) son vértices de un paralelogramo.

10) Dado el par de rectas que pasan: una por los puntos A y B y la otra por los puntos M y N, determinar si son paralelas o perpendiculares entre si.
    a) A (4, 1), B (-2, 5) y M (3, 7), N (-1, 1)
    b) A (-7, 1), B (1, -6) y M (-4, -6), N (3, 2)
    c) A (2, 2), B (9, 9) y M (6, 5), N (5, 6)

En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

PROBLEMAS SOBRE PUNTOS ALINEADOS

PUNTOS ALINEADOS.

Son lugares geométricos que se encuentran o forman parte de una misma recta. Todos los segmentos de recta que forman estos puntos (por parejas) deben de tener la misma pendiente.

EJEMPLOS:

1.- Demostrar que los puntos A(-3, 4), B(3, 2) y C(6, 1) son colineales.

$$m_{AB} = \frac{2-4}{3-(-3)} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}; \qquad m_{AC} = \frac{1-4}{6-(-3)} = \frac{-3}{6+3} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}; \qquad m_{AB} = m_{AC} = m_{BC} = -\frac{1}{3}$$

Pendiente de AB es igual a pendiente de AC ($-\frac{1}{3}$) por lo que los tres puntos están sobre una misma recta.

2.- Averiguar si A(12, 1), B(-3, -2) y C(2, -1) son puntos alineados.

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{-3-12} = \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}; \qquad m_{AC} = \frac{-1-1}{2-12} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{-1+2}{2+3} = \frac{1}{5}; \qquad m_{AB} = m_{AC} = m_{BC} = \frac{1}{5}$$

Pendiente de AB es igual a pendiente de AC ($\frac{1}{5}$) por lo que los puntos son colineales.

EJERCICIOS V

1) Investigar en cada inciso que tercias de puntos son colineales:

   a) A (2,3); B (-4,7) y C (5,8)
   b) A (4,1); B (5,-2) y C (6,-5)
   c) A (-1,-4); B (2,5) y C (7,-2)
   d) A (0,5); B (5,0) y C (6,-1)

e) A (9,0); B (2a,-b) y C (-a,2b)
f) A (-2,1); B (3,2) y C (6,3)
g) A (b,-2); B (2,1) y C (-2,4)

En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADAS DOS CONDICIONES

1.- DEFINICIÓN

Analíticamente, una línea recta es una ecuación lineal o de primer grado con dos variables. La representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una línea recta.
Tradicionalmente la línea recta se define como "la distancia más corta entre dos puntos"; en esta definición, se están estableciendo dos condiciones, los dos puntos.
La ecuación de la línea recta queda determinada si se ***establecen dos condiciones*** y puede adquirir cualquiera de las siguientes formas:

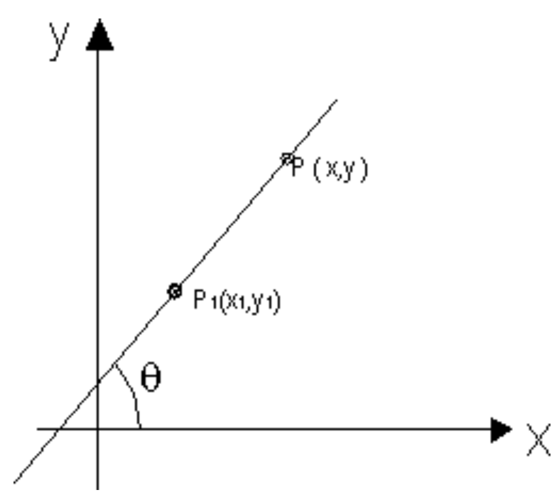
A) PUNTO – PENDIENTE.- La ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y tiene como pendiente "m" es: $\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$

B) PENDIENTE – ORDENADA EN EL ORIGEN.- La ecuación de la recta con pendiente "m" y que corta el eje "y" en el punto (0, b), siendo b la ordenada en el origen es: $\mathbf{y = mx + b}$

C) CARTESIANA.- Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2 es: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

D) ABSCISA Y ORDENADA EN EL ORIGEN.- La ecuación de la recta que corta al eje "x" en (a, 0), siendo a la abscisa en el origen y al eje y en (0,b), siendo b la ordenada en el origen es: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

A.- Una recta queda perfectamente determinada si se conoce uno de sus puntos y su dirección.



En la figura y con los conceptos ya conocidos:

$$\tan\theta = m = \frac{y - y_1}{x - x_1};$$

$$m(x - x_1) = y - y_1;$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Una recta paralela o coincidente con el eje "y" no tiene pendiente, su ecuación es x = k.

EJEMPLOS:

1.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por P (-4, 3) y tiene como pendiente $m = \frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1);$ $\qquad y - 3 = \frac{1}{2}(x - (-4))$

$2y - 6 = x + 4;$ $\qquad 2y - x - 10 = 0$ $\qquad x - 2y + 10 = 0$

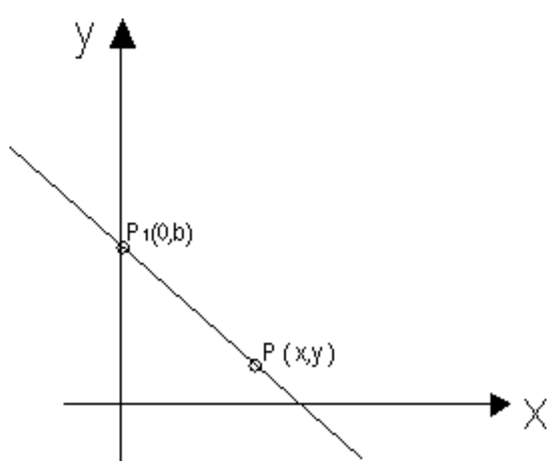
2.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por P(4, -1) y tiene un ángulo de inclinación $\theta = 135^o$.

$\tan\theta = \tan 135^a = \tan(180^a - 45^a) = -\tan 45^a;$ $\qquad \tan 135^a = -1$

$y - y_1 = m(x - x_1);$ $\qquad y - (-1) = -1(x - 4);$ $\qquad y + 1 = -x + 4$

x + y – 3 = 0

B.-Considerando la ecuación anteriormente señalada y si el punto conocido es $P_1(0,b)$ tenemos:



La ecuación es: $\qquad y - y_1 = m(x - x_1);$

$y - b_1 = m(x - 0)$ $\qquad y = m\,x + b$

Una recta paralela al eje “y” no tiene ordenada en el origen, su ecuación, al igual que en 1.A, es x = k; k es cualquier número real.

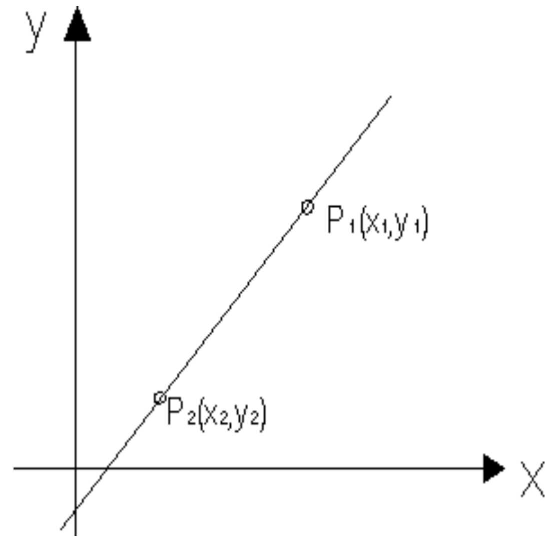
EJEMPLO:

1.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por B (0, 5) y tiene como m =-2

y = mx +b; $\qquad$ y =-2x+5; $\qquad$ y = -2x+5
2x+ y-5 = 0

C.-Conociendo cualquier par de puntos pertenecientes a una recta, podemos determinar su ecuación.

La pendiente de la recta de la figura es:



$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \qquad x_1 \neq x_2$$

Si sustituimos el equivalente de m en la ecuación de 1.A tenemos:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1); \qquad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Si $x_1 = x_2$, la recta es paralela al eje "y" y la ecuación no debe utilizarse, la ecuación sería: $x = x_1$.

EJEMPLOS:

1.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 (-2, -3) y P_2 (4, 2)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \qquad \frac{y - (-3)}{x - (-2)} = \frac{-3 - 2}{-2 - 4}; \qquad \frac{y + 3}{x + 2} = \frac{-5}{-6}; \qquad 6y + 18 = 5x + 10$$

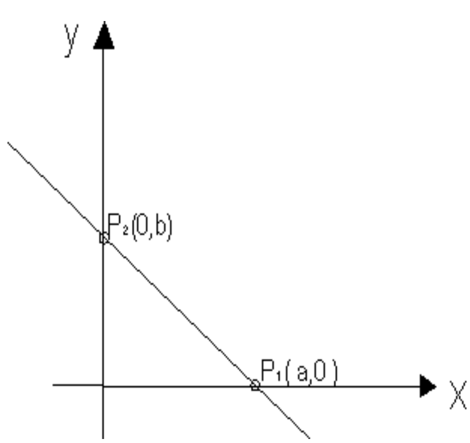
$5x - 6y - 8 = 0$

2.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por A(4, 2) y B(-5, 7)

$$\frac{y - 7}{x - (-5)} = \frac{7 - 2}{-5 - 4}; \qquad \frac{y - 7}{x + 5} = \frac{5}{-9}; \qquad -9y + 63 = 5x + 25$$

$5x + 9y - 38 = 0$

D.-A la ecuación de la recta con abscisa y ordenada en el origen también se le llama ecuación simétrica de la recta.



Aplicando la ecuación de la recta conocidos dos puntos resulta:

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{0 - b}{a - 0}; \qquad ay = -bx + ab$$

$bx + ay = ab$; y dividiendo por ab

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \qquad \text{con: } a \neq 0; \quad b \neq 0$$

Si $a = b = 0$, la recta no puede determinarse porque se conoce solamente un punto, el origen.

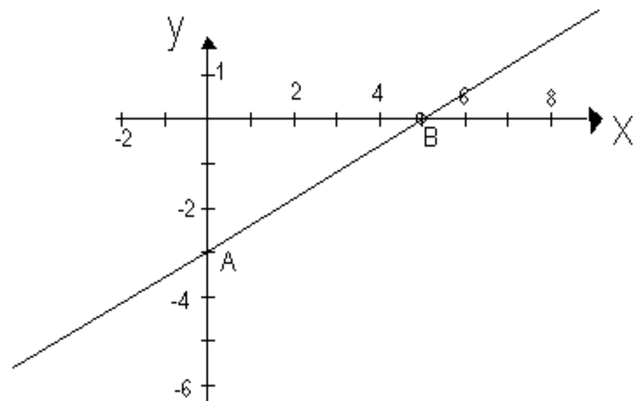
EJEMPLO:

Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y –3 respectivamente.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1; \qquad \frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1; \qquad \frac{-3x+5y}{-15}=1; \qquad -3x+5y=-15$$

$$3x-5y-15=0$$

La manera más sencilla de trazar una recta conociendo su ecuación es determinando las intersecciones con los ejes.



EJEMPLO:

Graficar la recta de la ecuación: 3x-5y-15=0

Si $x = 0$; $\quad y=\frac{15-3x}{-5}=-3; \quad A(0,-3)$

Si $y = 0$; $\quad x=\frac{15+5y}{3}=5; \quad B(5,0)$

EJERCICIOS VI

1) Encontrar en cada inciso la ecuación de la recta que cumpla con las condiciones señaladas
   a) Pasa por (0,2); m = 3
   b) Pasa por (0,-3); m = -2
   c) Pasa por (-5,2); (3,2)
   d) Pasa por (7,0); (0,4)
   e) Pasa por (0,0); (5,-3)
   f) Pasa por (0,3); m = $-\frac{4}{3}$
   g) Pasa por (2,-3); (4,2)
   h) Pasa por (5,3); (5,2)
   i) Pasa por (0,-1); m = 0
   j) Pasa por (2,2); m = 1

2) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (-6,-3) y tiene un ángulo de inclinación $\theta = 45^0$

3) Encontrar la ecuación en forma simétrica de la recta que pasa por (-1,4) y tiene una pendiente m = -2. La forma simétrica es abscisa y ordenada al origen.

4) Un cuadrilátero tiene como vértices los puntos: A (0,0), B (2,4), C (6,7)y D (8,0); encontrar la ecuación de cada lado.

En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA GENERAL

1. Forma General De La Ecuación De La Recta.

Una ecuación con variables “x” y “y" de primer grado o lineal se puede escribir de la forma **A x + B y + C = 0** en donde A, B y C son constantes arbitrarias. A la ecuación así escrita, se le conoce como Forma General de la Ecuación de la Recta.

2.- Otra Expresión De La Forma General De La Recta.

La ecuación de la recta en forma general puede expresarse de la manera conocida y = m x + b (pendiente y ordenada en el origen) Cuando hacemos $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$;

despejando “y” de la forma general, se tiene:

A x + B y + C = 0; B y = - A x – C; dividiendo entre B, obtenemos:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$; de donde: $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

3.- Recta Paralela Al Eje “y”.

Una recta es paralela al eje “y” si el coeficiente de y es cero.

A x + B y + C = 0; A x + (0) y + C = 0; A x = - C $x = -\frac{C}{A}$

4.- Recta Paralela Al Eje “x”.

Una recta es paralela al eje “x” si el coeficiente de x es cero.

A x + B y + C = 0; (0) x + B y + C = 0; B y = -C $y = -\frac{C}{B}$

5.- Coeficientes En La Forma General De La Recta.

En la ecuación de la recta en la forma general es muy importante el estudio de los coeficientes, pues esto alcanzará a otros tipos de curva. En la ecuación general, se tienen únicamente dos constantes independientes, puesto que dos de A o B o C se pueden escribir eliminando una de ellas.

A x + B y + C = 0; dividiendo entre A, se obtiene $x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$

B C

Se tienen como constantes independientes las razones $\frac{}{A}$ y $\frac{}{A}$

EJEMPLOS:

1.- Encontrar la pendiente "m" y la ordenada en el origen "b" de la ecuación 3 x + 2 y - 7 = 0

y = m x + b; $\quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}; \quad m = -\frac{3}{2}; \quad b = \frac{7}{2}$

Escribiendo la ecuación como A x + B y + C = 0 tenemos:

3 x + 2 y – 7 = 0; A =3; B = 2; C = - 7

$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}; \qquad b = -\frac{C}{B} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$

2.- Encontrar los coeficientes A, B, y C de A x + B y + C = 0 para que pase por (-1, 4) y (3, -2)

para (-1, 4) -A + 4 B + C = 0

para (3, -2) 3 A – 2 B + C = 0

Resolviendo el sistema, A $= -\frac{3}{5}$ C y B $= -\frac{2}{5}$ C sustituyendo A y B tenemos: $-\frac{3}{5}C(x) - \frac{2}{5}C(y) + C = 0$;

multiplicando por $\frac{5}{C}$; - 3 x – 2 y + 5 = 0; 3 x + 2 y – 5 = 0

EJERCICIOS VII

1) Hallar la ecuación de la recta que:
   a) Pasa por (-2,4) y m = -3
   b) Corta a "x" en 3 y a "y" en -5

determina los coeficientes (A; B y C) de la forma general.

2) Hallar la pendiente "m" e intersecciones ("a" y "b") de:
   a) 7x - 7y + 2 = 0
   b) 3x + 2y – 5 = 0
   c) 3x + y = 4
3) Encuentra la ecuación de la recta, pendiente, ángulo de inclinación y coeficientes (A; B y C) de la forma general de las rectas que pasan por:
   a) A (1,3); m = 2
   b) A (0,0); B (3,1)
   c) A (0,6); m = 3
   d) m = -8; b = 7
   e) A (2,0); B (0,-3)

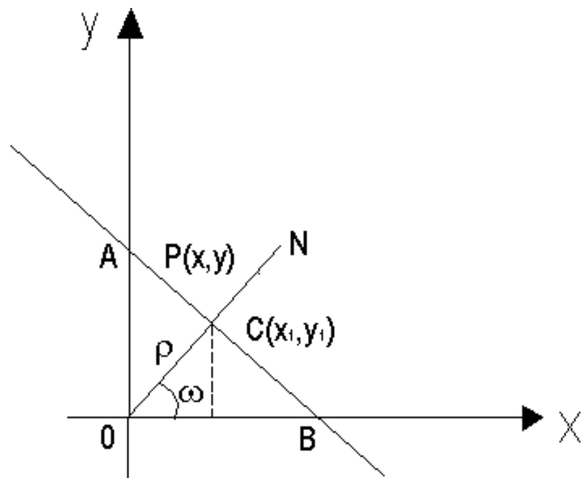
En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU SEGUNDA FORMA NORMAL

1.- FORMA NORMAL DE LA RECTA.

Una recta también queda determinada si se conocen:

a) La longitud de la perpendicular a ella trazada desde el origen O (0, 0) y
b) El ángulo que esta perpendicular forma con el eje “x”.



En la figura, la recta de que se trata es AB, ON es la perpendicular AB, ρ es la longitud de ON desde O hasta C (punto de AB) y ω es el ángulo que la perpendicular a la recta forma con el eje x desde 0º hasta 360º.

$\text{Sen } \omega = \frac{y_1}{P}$; $\quad y_1 = \rho \text{ sen } \omega$

$\text{Cos } \omega = \frac{x_1}{P}$; $\quad x_1 = \rho \cos \omega$

ρ cos ω y ρ sen ω son coordenadas del punto C

$$m_{AB} = -\frac{1}{\tan\omega} = -\cot\omega = -\frac{\cos\omega}{sen\omega}; \qquad y - y_1 = m\,(x - x_1); \quad y - p\,\mathbf{sen}\omega = \mathbf{-}\frac{\mathbf{cos}\omega}{\mathbf{sen}\omega}(x - p\,\mathbf{cos}\omega)$$

$$y \text{ sen } \omega - \rho \text{ sen}^2 \omega = -x \cos \omega + \rho \cos^2 \omega; \qquad y \text{ sen } \omega + x \cos \omega - \rho \text{ sen}^2 \omega - \rho \cos^2 \omega = 0$$

de donde resulta que:

$$x \cos \omega + y \text{ sen } \omega - \rho\,(\text{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0;$$

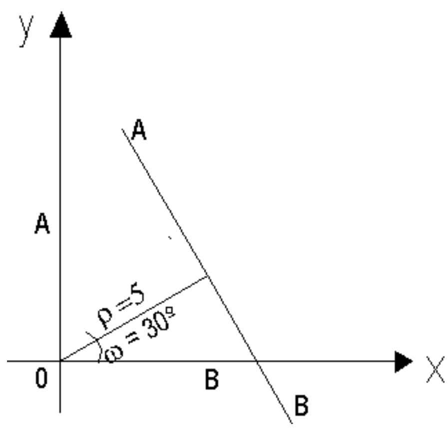
la forma normal de la ecuación de la recta es: $\quad x \cos \omega + y \text{ sen } \omega - \rho = 0$

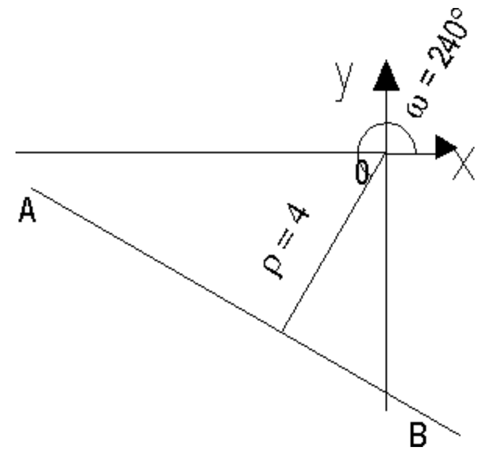
En donde ρ es número positivo que indica la distancia del origen a la recta perpendicularmente y ω es el ángulo positivo menor de 360º medido a partir de la parte positiva del eje x.

EJEMPLOS:

1.- Encontrar la ecuación de la recta AB y su trazo correspondiente cuando:

a) ρ = 5 y $\omega = \frac{1}{6}\pi \text{rad.} = 30^{\circ}$ b) ρ = 4 y $\omega = \frac{4}{3}\pi \text{rad.} = 240^{\circ}$





Ecuación a:

x cos ω + y sen ω – ρ = 0

x cos 30º + y sen 30º - 5 = 0

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$$

$$\sqrt{3}x + y - 10 = 0$$

Ecuación b:

x cos 240º + y sen 240º - 4 = 0

-x cos 60º - y sen 60º - 4 = 0

$$-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 4 = 0$$

$$x + \sqrt{3}y + 8 = 0$$

EJERCICIOS VIII

1) Trazar las rectas $\overline{AB}$ y escribir la ecuación respectiva:

a) ρ = 6; $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad. g) ρ = 2; $\omega = \frac{3}{4}\pi$ rad.

b) ρ = 5; $\omega = \frac{7}{4}\pi$ rad. = 315^{0}

c) ρ = 6; ω = 30^{0}

d) ρ = 3; ω = 0^{0}

e) ρ = 4; $\omega = \frac{3}{2}\pi$ rad.

f) ρ = 3; $\omega = {}^{2}\,\pi$ rad.

2) Una recta es tangente a un círculo en el punto (2,- $\sqrt{5}$), si el centro del círculo es el origen y su radio es 3; haga el trazo de la figura y encuentre la ecuación normal de la tangente en ese punto.

3) La ecuación de una recta es x cos ω + y sen ω -5 = 0; encontrar el ángulo ω para que la recta pase por el punto (-4,3)

4) Encontrar la ecuación de la tangente a un círculo en el punto (-3,4) con centro en el origen y radio igual a 5.

TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES DE RECTAS A LA FORMA NORMAL

1.- FORMAS GENERAL Y NORMAL DE ECUACIONES DE RECTAS

De las diferentes maneras de escribir la ecuación de una recta, fijaremos la atención en las formas general y normal que son:

1. $A x + B y + C = 0$ Forma general
2. $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - \rho = 0$ Forma normal

2.- TRANSFORMACIÓN DE LA FORMA GENERAL A NORMAL

Esta transformación es útil para algunos problemas por lo que, para realizar este trabajo a continuación se hacen las siguientes consideraciones:

1ª. Los coeficientes de "x", de "y" y los términos independientes de las ecuaciones 1 y 2 son proporcionales.

3. $\dfrac{\cos\omega}{A} = \dfrac{sen\omega}{B} = \dfrac{-p}{C} = K$; K = Constante de proporcionalidad.

2º. Tomando pares de miembros en las igualdades de 3

4. $\dfrac{\cos\omega}{A} = K$; $\cos \omega = KA$

5. $\dfrac{sen\omega}{B} = K$; $\operatorname{sen} \omega = K B$

6. $\dfrac{-\rho}{C} = K$; $-\rho = K C$

3ª. Elevando al cuadrado en 4 y 5, sumando sus miembros y efectuando operaciones tenemos que: $\cos^2 \omega + \text{sen}^2\, \omega = K^2\,(A^2 + B^2) = 1$ de donde

7. $K^2 = \dfrac{1}{A^2 + B^2}$; $\qquad K = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$

4ª. Sustituyendo los valores de 7 en 4, 5 y 6

8. $\cos\omega = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$; $\qquad$ 9. $\text{sen}\,\omega = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$; $\qquad$ 10. $-\rho = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$

5ª. La recta definida por la forma general 1, tiene por ecuación en la forma normal 2 la siguiente:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

En la fórmula anterior, deben cumplirse las condiciones siguientes:

a) Si $C \neq 0$; el signo del radical $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ debe ser el contrario al de C
b) Si C = 0 y $B \neq 0$; el radical y B tienen el mismo signo
c) Si C = B = 0; el radical y A tienen el mismo signo

EJEMPLOS:

1.- Transformar a la forma normal la recta 3x – 4 y – 6 = 0; encontrar ρ y ω.

A x + B y + C = 0: A = 3; B = -4; C = -6

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \pm\sqrt{9+16} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Como C es negativo (-6) la raíz de $\sqrt{A^2 + B^2}$ que se toma es la positiva (+5).

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0; \qquad \cos\omega = \frac{3}{5}; \qquad sen\omega = \frac{-4}{5}; \qquad p = \frac{6}{5}; \qquad \omega = 306^\circ\ 52'$$

como cos ω es positivo y sen ω es negativo, el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante. Si

$$-\rho = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}; \qquad p = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.- Encontrar la distancia del origen a la recta 2x-3y+9=0.
Para encontrar la forma normal: A = 2, B = -3 y C = 9

$\pm\sqrt{A^2+B^2} = \pm\sqrt{4+9} = \pm\sqrt{13}$; $\quad$ *como* C es +; el radical es $-\sqrt{13}$;

$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{9}{\sqrt{13}} = 0$; $\quad$ $\rho = \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{9}{13}\sqrt{13}$

La distancia es: $\frac{9}{13}\sqrt{13}$

EJERCICIOS IX

1) Reduce a la forma normal y encuentra los valores de "ω" y "ρ" de las rectas que en cada inciso se proporcionan:

   a) 2x – 5y – 52 = 0
   b) x – y – 4 = 0
   c) 2x + 3y – 8 = 0
   d) 3x + 2y – 7 = 0
   e) 4x + 5y + 10 = 0
   f) 4x + 3y – 18 = 0
   g) 3x – 4y + 11 = 0

2) Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que pasa por (-1,7) y (4,2), encuentre los valores de "ω" y "ρ" .

3) Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta 2x – 3y + 7 = 0 y determina sobre el eje "x" el segmento – 9, encuentre los valores de "ω" y "ρ" .

En todos los casos trazar la gráfica correspondiente.

SECCIONES CÓNICAS

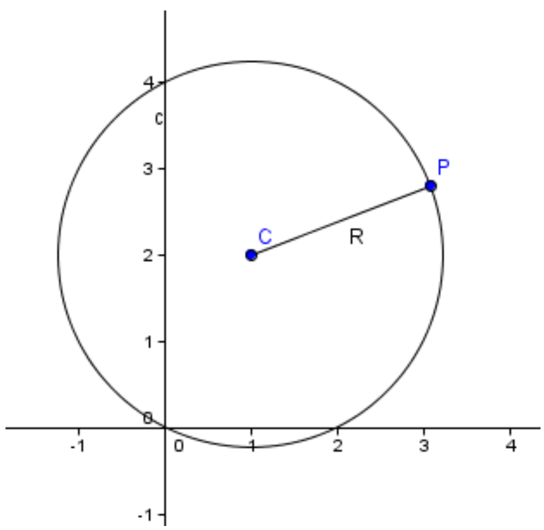
Una sección cónica (o cónica) es una curva de intersección de un plano con un cono recto circular de dos hojas; tenemos cuatro tipos de curvas: CIRCUNFERECNIA, ELIPSE, HIPÉRBOLA Y PARÁBOLA. El matemático Apolonio estudio las secciones cónicas en términos de Geometría utilizando este concepto.

Ahora bien, pero qué es una cónica, es el conjunto de puntos "P" del plano tales que la distancia no dirigida de "P" a un punto fijo está en razón constante a la distancia no dirigida de "P" a una recta fija que no contiene al punto fijo. Esta razón constante en la definición anterior se llama excentricidad.

Las cónicas tienen innumerables aplicaciones en las ciencias y en la tecnología; de allí la gran importancia que tiene conocerlas y resolver problemas donde se apliquen cada una de ellas.

CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de los puntos P(x, y) del plano que (equidistan) de un punto C(h, k) llamado Centro.



R = radio

C(h,k) = Centro

P(x,y) = Punto Cualquiera de Circunferencia.

Vamos a obtener la **ECUACIÓN CANÓNICA** de circunferencia. Por definición de Distancia entre dos puntos, se tiene:

R = d(C, P) Esto es:

$d(C,P) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \Rightarrow R = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$$\Rightarrow R^2 = (\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2})^2$$

$$\Rightarrow R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

ECUACIÓN CANÓNICA DE CIRCUNFERENCIA DE CENTRO C(H, K) Y RADIO R.

Ejemplo No. 1:

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$; es la Ecuación de una Circunferencia de centro C(1,-3) y radio R = 4

Ejemplo No. 2:

$x^2 + (y - 4)^2 = 7$ es la Ecuación de una circunferencia de centro C(0, 4) y Radio R = $\sqrt{7}$.

Ejemplo No. 3

Si el centro de la circunferencia es C(0,0) y radio R = 5; la Ecuación es:

$x^2 + y^2 = 25$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Al desarrollar la Ecuación Canónica $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ resulta:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = R^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 = R^2$$

Ahora tenemos:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde A = B y no aparece producto de la variable x e y.

Ejemplo No. 1:

Una circunferencia tiene centro C(-3, 4) y pasa por el punto P(1, -2) . Determinar su Ecuación General.
<u>Solución:</u>

Para llegar a la ecuación general partimos de la ecuación canónica:

$$R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Observamos si tenemos el centro, en este caso C(-3, 4) pero el radio no está dado. ¿Cómo encontrarlo? Es sencillo, ya que nos dan un punto P(1, -2) por donde pasa las circunferencia; y sabemos que *R = d(C, P).* Entonces, por definición de distancia, tenemos:

R = d(C, P) $\Rightarrow R = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-4)^2}$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2}$$

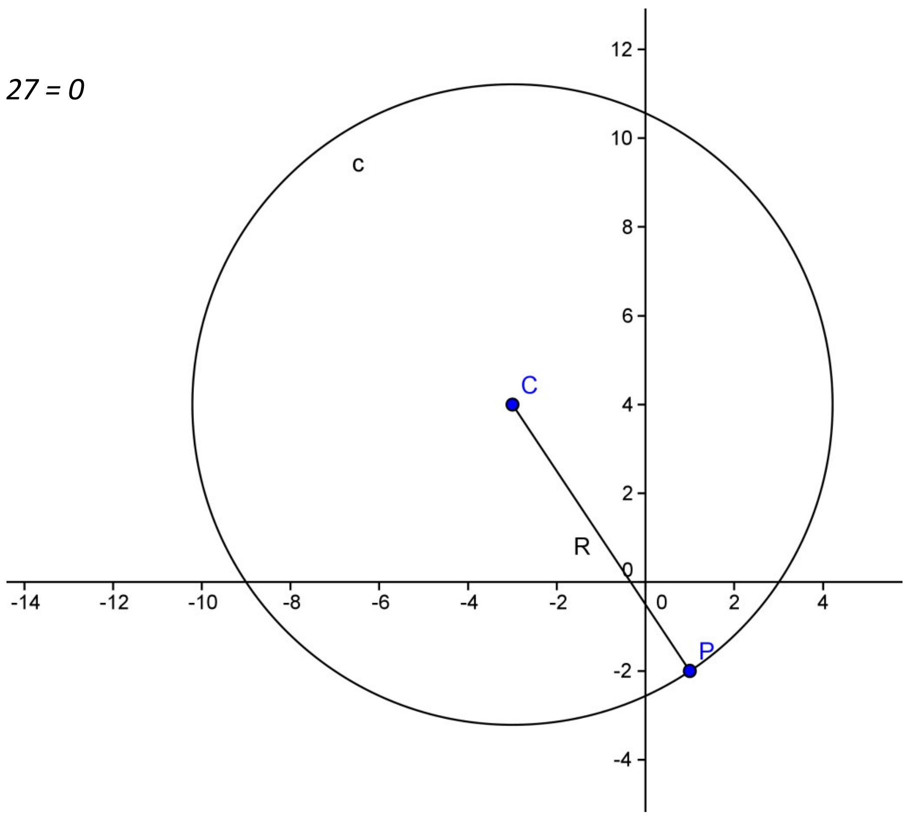
$$\Rightarrow R = \sqrt{16+36} \Rightarrow R = \sqrt{52}$$

Luego, sustituyendo tenemos:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2$ Desarrollando la Ecuación canónica. La ecuación general queda:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 27 = 0$

Gráficamente:



EJERCICIOS:

1.- Determinar la ecuación general de la circunferencia de centro C$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ y Radio R = $3\sqrt{2}$.

2.- Determinar la Ecuación General de la Circunferencia si los extremos del diámetro son A(-2, 4) y B(0, -8) .

3.- Determinar la Ecuación de la Circunferencia de centro C(-1,4) y es tangente al eje de las abscisas.

4.- Calcular la distancia entre los centros de la circunferencia de ecuación:

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ y $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

5.- Determinar la Intersección entre la recta de ecuación $x – y = 1$ y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x – 4y – 1 = 0$.

6.- Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto P(1, 6) y tangente a la recta de la ecuación $x – y – 1 = 0$

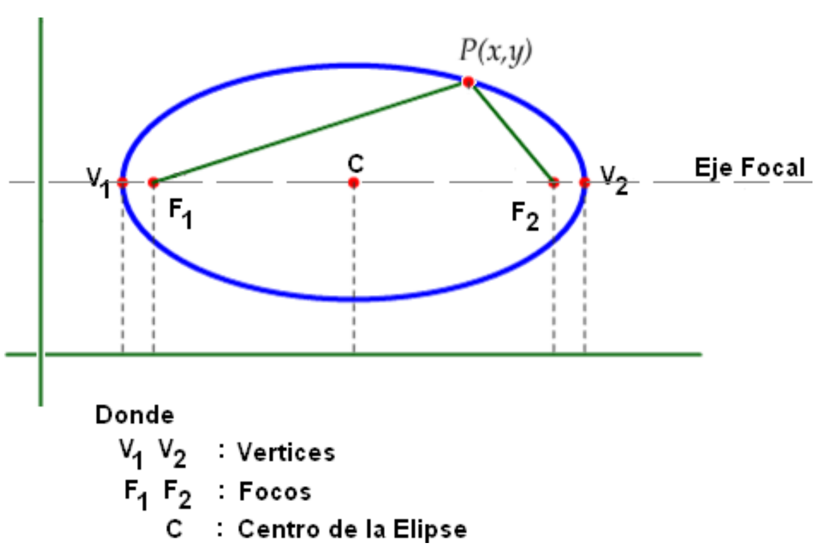
LA ELIPSE

Definición

Una elipse es el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (lugar geométrico) cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano (llamados focos) es constante.

Llamaremos centro de la elipse, al punto medio entre los focos

La recta que pasa por los focos, corta a la elipse en dos puntos llamados vértices. La cuerda que une los vértices es el eje mayor de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro se llama eje menor de la elipse.



FORMA CANÓNICA DE LA ELIPSE

EJE FOCAL HORIZONTAL

Teorema

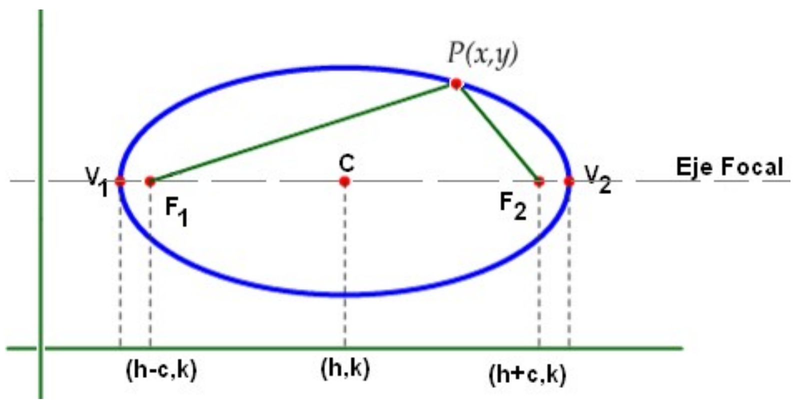
Sean $F_1(h-c,k)$, $F_2(h+c,k)$ focos de una elipse, $C(h,k)$ centro de la elipse, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ y $h,k,c \in IR$, $c>0$, entonces la forma canónica de la ecuación de una elipse esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Donde $a>c$, $a>b$ y $b^2=a^2-c^2$

LA ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$$



Elipse de eje focal Horizontal

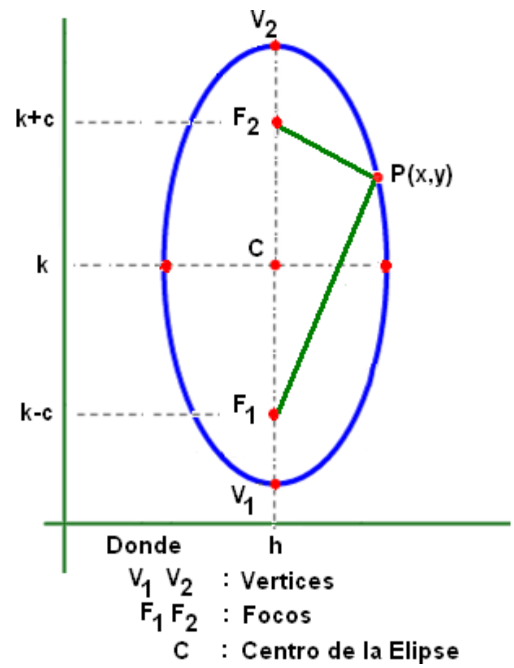
EJE FOCAL VERTICAL

Teorema

Sean $F_1(h,k-c)$, $F_2(h,k+c)$ focos de una elipse, $C(h,k)$ centro de la elipse, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ y $h,k,c \in IR$, $c>0$, entonces la forma canónica de la ecuación de una elipse está dada por

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Donde $a>c$, $a>b$ y $c^2=a^2-b^2$



Elipse de eje focal Vertical

ELIPSE CENTRADA EN EL ORIGEN

EJE FOCAL HORIZONTAL

Toda elipse centrada en el origen y de eje focal horizontal es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Con $a>b$, $c^2=a^2-b^2$

EJE FOCAL VERTICAL

Toda elipse centrada en el origen y de eje focal horizontal es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Con $a>b$, $c^2=a^2-b^2$

LA EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

La excentricidad es una medida de la "circularidad" de una elipse, entre más cerca de cero más circular y entre más cerca de uno más alargada.

Definición (excentricidad)

La excentricidad e de una elipse está dada por el cociente $e=\frac{c}{a}$

Observe que al estar situados los focos en el eje mayor entre el centro y los vértices, siempre se tiene que

$$0<c<a\Rightarrow 0<\frac{c}{a}<1\Rightarrow 0<e<1$$

Es decir, las elipses tienen una excentricidad menor a uno. Para una elipse casi circular, los focos están cerca del centro y $\frac{c}{a}$ es pequeño. Para una elipse alargada los focos están cerca de los vértices y $\frac{c}{a}$ es casi 1.

Ejercicios Resueltos

- Hallar la ecuación canónica de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$ y trazar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la excentricidad.

Solución

Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado de la expresión en ambas variables.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

$$4\left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 4y\right) = 8$$

$$4\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + \left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) = 8$$

$$4\left((x-1)^2 - 1\right) + \left((y+2)^2 - 4\right) = 8$$

$$4(x-1)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 = 8$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

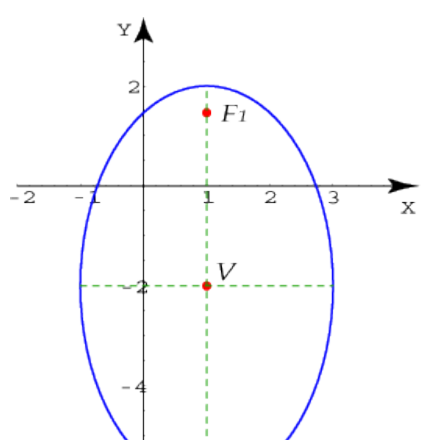
De donde obtenemos que el centro es $C(1,-2)$, el valor de $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ (a es la longitud mayor, esto nos dice que la elipse es vertical), el valor de $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ y el valor de c está dado por:

$$c^2 = 16 - 4 = 12$$

$$c = 2\sqrt{3}$$

Y así, los focos están dados por $F_1\left(1,-2-2\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(1,-2+2\sqrt{\ }\right)$ y los vértices por $(\quad)$ y $(\quad)3$. Por último, la excentricidad es $e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La gráfica se muestra en la figura.



- Hallar la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(3,1)$ y $(3,9)$ y eje menor de longitud 6.

Solución

Como la longitud del eje menor es de 6 unidades, entonces $b=3$. Como los vértices están en $(3,1)$ y $(3,9)$, entonces el centro está en $(3,5)$, el eje mayor de la elipse es vertical y $a=4$.Con lo cual

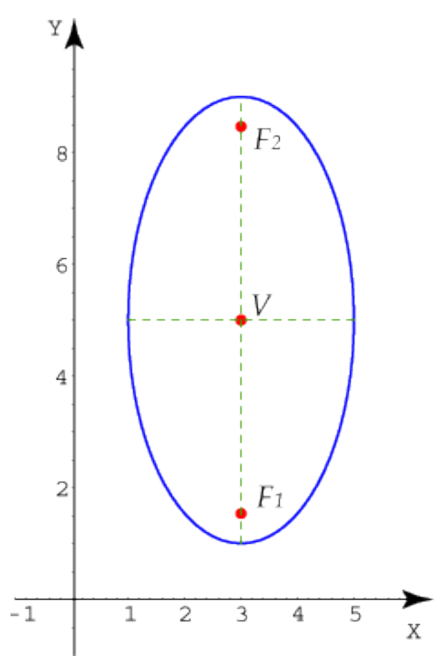
$$c^2=a^2-b^2=16-9=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

Por último, la excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ y la ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

Los focos están en $F_1\left(3,5-\sqrt{7}\right)$, $F_2\left(3,5+\sqrt{7}\right)$. La gráfica de la elipse se muestra en la figura 17.



- Determine la ecuación canónica de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los puntos $(-1,0);(3,0);(0,2);(0,-2)$.

Solución

Suponga que el centro de la elipse es $C(h,k)$. Si la elipse tiene eje horizontal su ecuación debe ser:

Caso 1 Si la elipse tiene eje horizontal su ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Evaluando cada uno de los puntos, obtenemos el siguiente sistema:

(1) Si $x=-1,\ y=0 \implies \dfrac{(h+1)^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=1$

(2) Si $x=3,\ y=0 \implies \dfrac{(3-h)^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=1$

(3) Si $x=0,\ y=2 \implies \dfrac{h^2}{a^2}+\dfrac{(2-h)^2}{b^2}=1$

(4) Si $x=0,\ y=-2 \implies \dfrac{h^2}{a^2}+\dfrac{(2+h)^2}{b^2}=1$

De (3) y (4) obtenemos (5) $\dfrac{(2-h)^2}{b^2}=\dfrac{(2+h)^2}{b^2} \implies h=0$

De (1), (2) y (5) tenemos que $\dfrac{(h+1)^2}{a^2}=\dfrac{(3-h)^2}{a^2} \implies \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{9}{a^2} \implies 1=9$

Lo cual es falso. Esto nos dice que no existe una elipse de eje horizontal que pase por esos.

Caso 1 Si la elipse tiene eje es vertical, su ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Sustituyendo cada uno de los obtenemos el siguiente sistema:

(6) Si $x=-1,\ y=0 \implies \dfrac{(1+h)^2}{b^2}+\dfrac{k^2}{a^2}=1$

(7) Si $x=3,\ y=0 \implies \dfrac{(3-h)^2}{b^2}+\dfrac{k^2}{a^2}=1$

(8) Si $x=0,\ y=2 \implies \dfrac{h^2}{b^2}+\dfrac{(2-k)^2}{a^2}=1$

(9) Si $x=0,\ y=-2 \implies \dfrac{h^2}{b^2}+\dfrac{(2+k)^2}{a^2}=1$

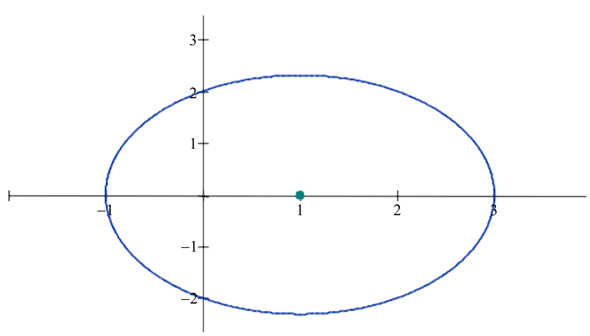
De (6) y (7) tenemos (10) $(1+h)^2=(3-h)^2 \implies h=1$

De (8) y (9) tenemos (11) $(2-k)^2=(2+k)^2 \implies k=0$

De (6), (8), (10) y (11) tenemos $\dfrac{4}{b^2}=1$ y $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{4}{a^2}=1 \implies b^2=4$ y $a^2=\dfrac{16}{3}$.

Con lo cual la ecuación de la elipse es:

$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{3y^2}{16}=1$ Y su grafica es



Ejercicios Propuestos

1. Determinar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(1,-2)$, eje mayor horizontal 8 y excentricidad $3/4$.

2. Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(0,0)$, eje mayor horizontal y los puntos $(3,1)$ y $(4,0)$ están en la elipse.

3. Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(2,1)$ y longitud de eje mayor de 5 y longitud del eje menor 2

4. Hallar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse que tiene un vértice y un foco en común con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.

5. Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse cuya suma de distancias a los $(\pm 3, 0)$ es 16.

6. Encuentra el valor de la excentricidad y la clase de cónica representada por cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$

b) $2x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

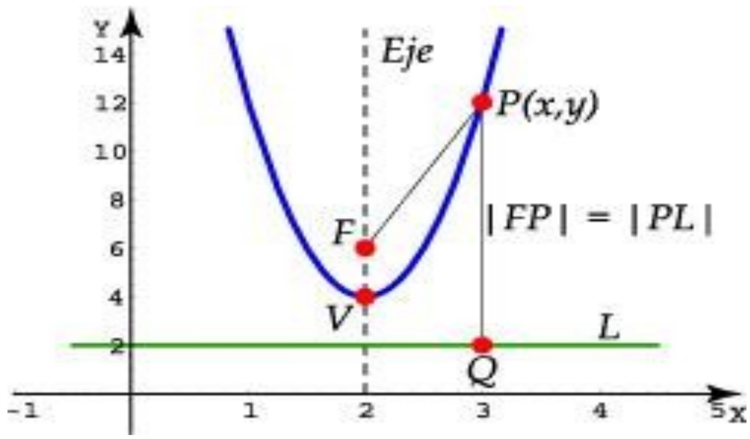
c) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y = 23$

d) $9x^2 + 8y^2 - 72y + 144 = 0$

7. Determine la ecuación canónica de la elipse con focos en $(3,-3)$ y $(-3,3)$ y eje mayor de longitud 10 (Nota: los focos de esta elipse no están en una recta vertical ni horizontal).

PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos P(x, y) y del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado “foco” y una recta fija llamada Directriz. Veamos la gráfica para identificar los elementos en sistemas de coordenadas cartesianas.



El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice, la recta que pasa por el foco y por el vértice se llama eje de la parábola. Se puede observar en la figura que una parábola es simétrica respecto a su eje.

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA

CASOS

Eje Focal de la parábola es Vertical

Teorema

La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V=(h;k)$ y directriz $y=k-p$ es

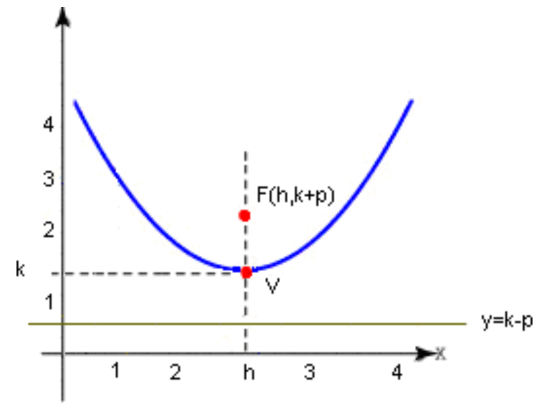
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice

Caso 1 Apertura de la parábola hacia arriba.

Valor de p	Coordenadas del Foco F	Ecuación de la directriz
$p>0$	$(h,k+p)$	$y=k-p$

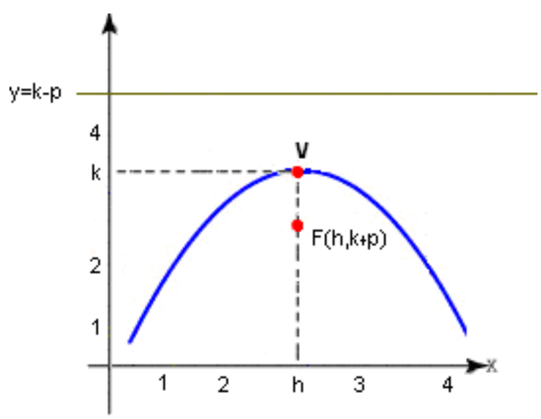
Y su grafica es



Caso 2 Apertura de la parábola hacia Abajo.

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p<0$	$(h,k+p)$	$y=k-p$

Y su grafica es



<u>Eje Focal de la parábola es Horizontal</u>

Teorema

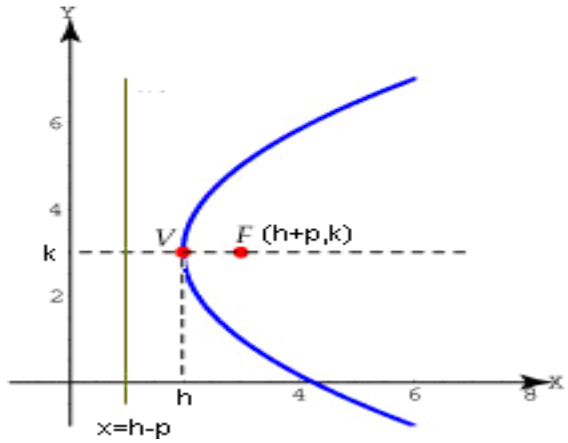
La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V=(h;k)$ y directriz $x=h-p$ es

$(y-k)^2=4p(x-k)$ Donde foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice

Caso 1 Apertura de la parábola hacia la derecha.

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p > 0$	$(h + p, k)$	$x = h - p$

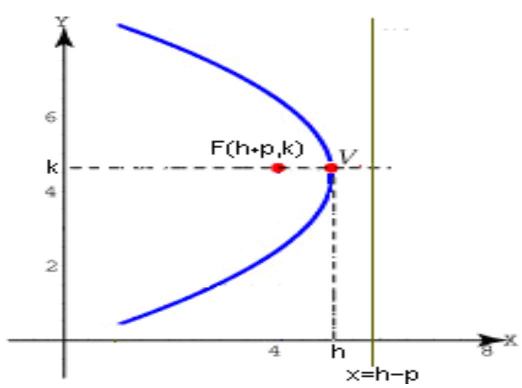
Su grafica



Caso 2 Apertura de la parábola hacia la izquierda

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p < 0$	$(h + p, k)$	$x = h - p$

Su grafica



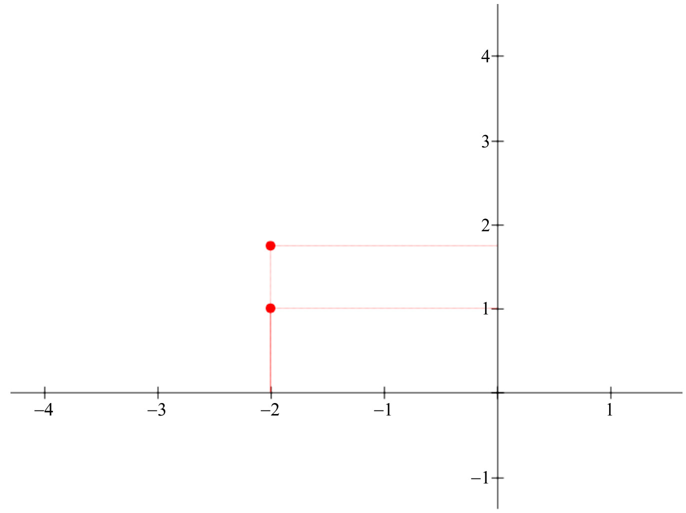
Ejemplos resueltos

- Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es

$$2x^2 + 8x - 6y + 14 = 0$$

Solución

La gráfica se muestra en la figura

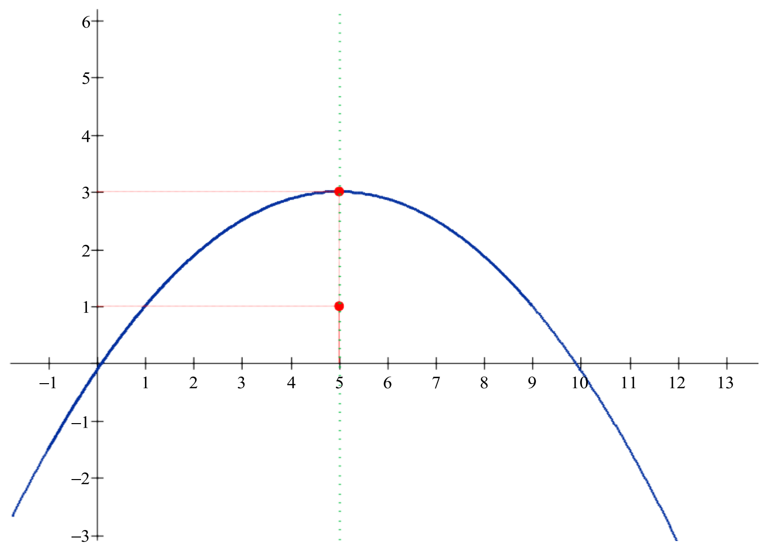


- Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es

$$x^2 - 10x + 8y + 1 = 0$$

Solución

La gráfica se muestra en la figura

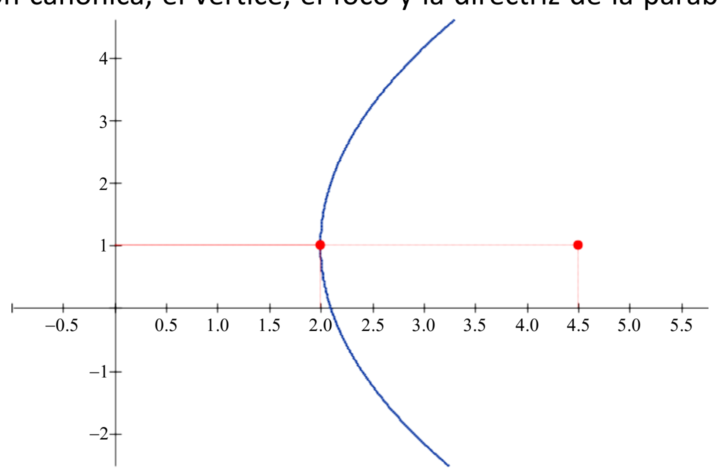


- Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es

$$y^2 + 21 - 10x - 2y = 0$$

Solución

La gráfica se muestra en la figura



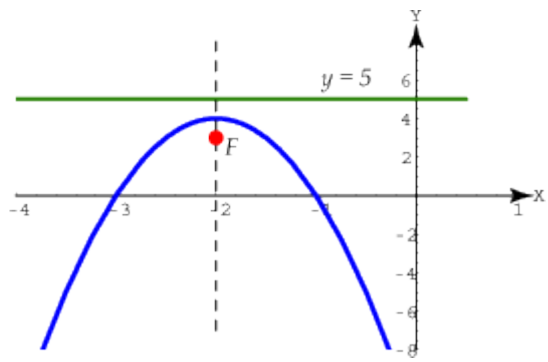
- Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $V(-2,4)$ y foco en $F(-2,3)$.

Solución

Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa el eje de la parábola es vertical, además abre hacia abajo y $p=-1$, entonces la ecuación está dada por:

$$y-4=-4(x+2)^2$$

La directriz es $y=5$.La gráfica se muestra en la figura.



- Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es

$$y^2-6y-4x+17=0$$

Solución

Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado en a. De la ecuación de la parábola tenemos que

$$y^2-6y-4x+17=0$$

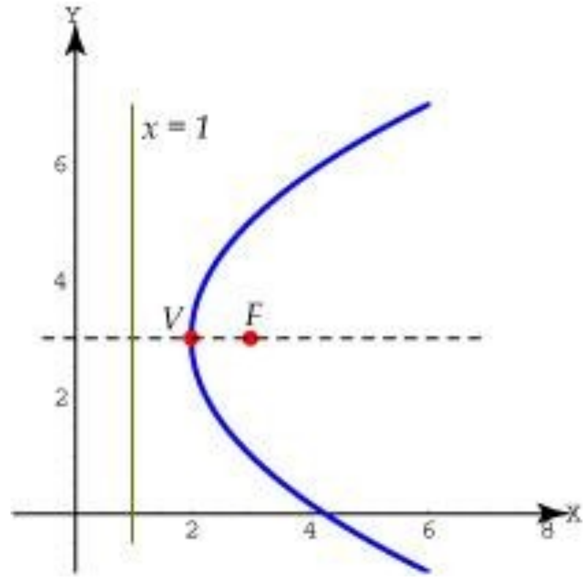
$$y^2-6y+9-9-4x+17=0$$

$$(y-3)^2-4x+8=0$$

$$(y-3)^2-4(x-2)=0$$

$$(y-3)^2=4(x-2)$$

De donde obtenemos que $p=1$ y el vértice $V(2,3)$, por lo tanto, la parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F(3,3)$, la recta directriz es $x=1$. La gráfica se muestra en la figura .



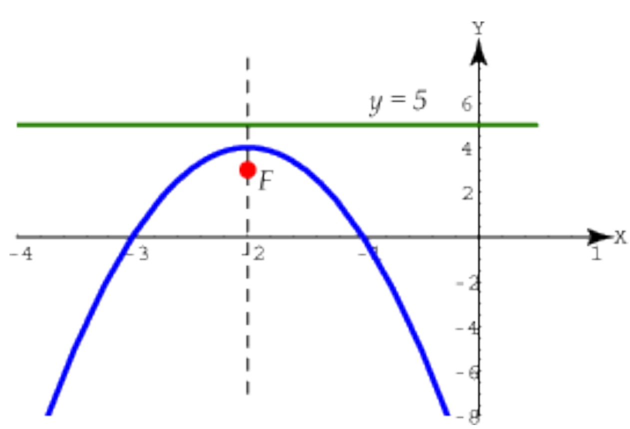
- Trazar la gráfica y hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $V(-2,4)$ y foco en $F(-2,3)$.

Solución

Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa el eje de la parábola es vertical, además abre hacia abajo y $p=-1$, entonces la ecuación está dada por:

$y-4=-4(x+2)^2$

La directriz es $y=5$.La gráfica se muestra en la figura.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el vértice, el foco, la directriz y la gráfica de cada una de las siguientes parábolas

   1.1. $y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$ 1.2. $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$

   1.3. $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$ 1.4. $y = 40x - 97 - 4x^2$

   1.5. $x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$ 1.6. $y^2 - 6y - 4x + 5 = 0$

2. Hallar en cada caso, la ecuación canónica de la parábola de vértice en el punto $(2,3)$ y:

   2.1. Foco en el punto $(2,5)$

   2.2. Foco en el punto $(-1,3)$

   2.3. con Directriz la recta $x = -1$

   2.4. con Directriz la recta $y = 5$

3. Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1,3)$ y foco en $(2,3)$

4. Determine la ecuación canónica de la parábola que abre en la dirección del eje X y pasa por los puntos $(0,1)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$

5. Determine la ecuación canónica de la parábola $-9y^2 - 8x - 3 = 0$

6. Determine la ecuación canónica de la parábola que abre en la dirección del eje x y pasa por los puntos $(1,3)$, $(3,4)$, $(7,12)$

   Respuesta: $(x-1)^2 = 4(y-3)$

7. Determine la ecuación canónica de la parábola que tiene eje vertical y pasa por los puntos. $(2,3)$, $(4,3)$, $(6,-5)$

8. Determine la ecuación canónica de la parábola que pasa por los puntos. $(-2,3)$, $(0,3)$, $(1,9)$

9. Determine la ecuación canónica de la parábola con foco en $(-1,1)$ y directriz $y = 5$.

10. Determine la ecuación canónica y el foco de la parábola que satisface simultáneamente las siguientes condiciones

10.1. vértice en $(2,0)$.

10.2. contiene al punto $P(8,b)$ $b > 0$

10.3. la distancia de P a la directriz es 10.

LA HIPÉRBOLA

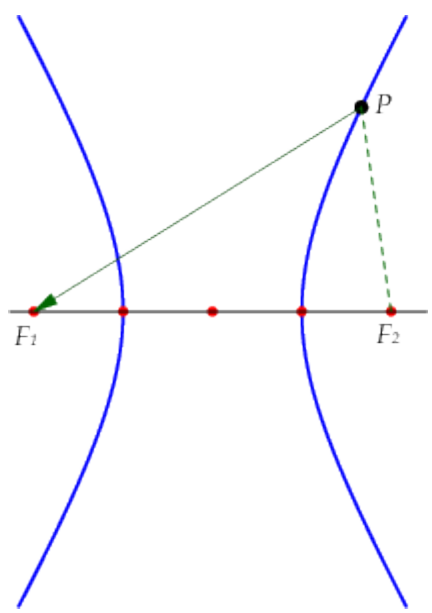
Las hipérbolas aparecen en muchas situaciones reales, por ejemplo, un avión que vuela a velocidad supersónica paralelamente a la superficie de la tierra, deja una huella acústica hiperbólica sobre la superficie. La intersección de una pared y el cono de luz que emana de una lámpara de mesa con pantalla troncocónica, es una hipérbola.

La definición de la hipérbola como lugar geométrico es similar a la dada para la elipse, como vemos en seguida

Definición

Una hipérbola es el conjunto de puntos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los que la diferencia de sus distancias a dos puntos distintos prefijados (llamados focos) es, en valor absoluto, una constante.

La recta que pasa por los focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados vértices. El segmento recto que une los vértices se llama eje transversal y su punto medio es el centro de la hipérbola. Un hecho distintivo de la hipérbola es que su gráfica tiene dos partes separadas, llamadas ramas



La Hipérbola

Teorema (ecuación canónica de la hipérbola)

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $C(h,k)$ es

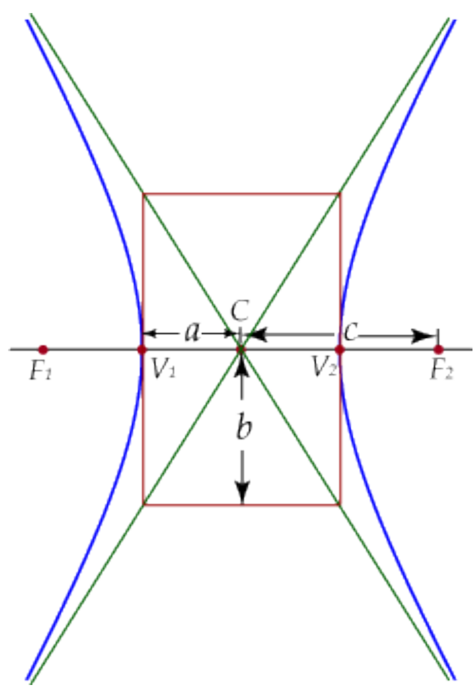
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

con eje transversal horizontal. Y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

con eje transversal vertical. (

Los vértices están a una distancia de a unidades del centro y los focos a una distancia de c unidades del centro. Además $b^2=c^2-a^2$



Resumiendo:

Si el eje transversal de la hipérbola es horizontal entonces

- El centro está en $C(h,k)$
- Los vértices están en $(h \pm a, k)$
- Los focos están en $(h \pm c, k)$.

Si el eje transversal de la hipérbola es vertical entonces

- El centro está en $C(h,k)$
- Los vértices están en $(h, k \pm a)$.
- Los focos están en $(h, k \pm c)$.

Una ayuda importante para trazar la gráfica de una hipérbola son sus asíntotas. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que se intersecan en su centro y pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones ***2a*** y ***2b*** y centro en $C(h,k)$.El segmento recto de longitud ***2b*** que une $(h, k+b), (h, k-b)$ se llama eje conjugado de la hipérbola. El siguiente teorema identifica la ecuación de las asíntotas.

Teorema (Asíntotas de una hipérbola)

Si la hipérbola tiene un eje transversal horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$

y si el eje transversal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$$

Observación:

Las asíntotas de la hipérbola coinciden con las diagonales del rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$ centro $C(h,k)$.Esto sugiere una forma simple de trazar tales asíntotas.

Excentricidad de una hipérbola

Definición (excentricidad de una hipérbola)

La excentricidad de una hipérbola está dada por el cociente $e = \frac{c}{a}$

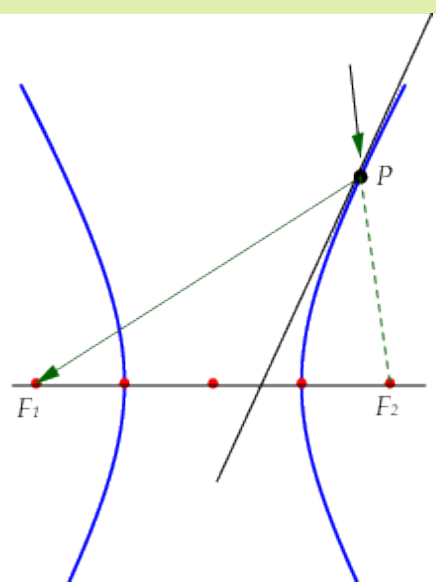
Si la excentricidad es grande los focos están cerca del centro y las ramas de la hipérbola son casi rectas verticales. Si la excentricidad es cercana a uno los focos están lejos del centro y la ramas de la hipérbola son más puntiagudas.

Propiedad de reflexión

La propiedad reflectora de la hipérbola afirma que un rayo de luz dirigido a uno de los focos de una hipérbola se refleja hacia el otro foco

Teorema (propiedad de reflexión)

La tangente en un punto ***P*** de una hipérbola es la bisectriz del ángulo formado por lo segmentos que unen este punto con los focos.



EJERCICIOS RESUELTOS

- Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es

$$9\,x^2 - y^2 - 36\,x - 6\,y + 18 = 0$$

Solución

Completando el cuadrado en ambas variables

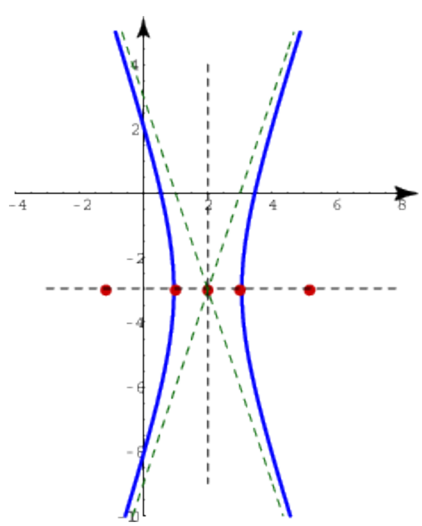
$$\begin{aligned} 9\left(x^2 - 4\,x + 4 - 4\right) - \left(y^2 + 6\,y + 9 - 9\right) + 18 &= 0 \\ 9\,(x-2)^2 - (y+3)^2 &= 9 \\ \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el centro está en $(2, -3)$. El eje de la hipérbola es horizontal, $a = 1, b = 3$ y

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; c^2 = 10 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{10}$$

Los vértices están en $(1, -3),\ (3, -3)$, los focos en $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$ y $(2, -3 - \sqrt{13}$ y la excentricidad es $e = \sqrt{10}$

Su grafica es



- Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3,-5)$ y $(3,1)$ y asíntotas $y=2x-8$ y $y=-2x+4$. Además calcule los focos, la excentricidad y trace la gráfica.

Solución

Por ser el centro el punto medio de los vértices sus coordenadas son $(3,\ -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a=3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas.

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \ \Rightarrow \ b = \frac{a}{2} \ \Rightarrow \ b = \frac{3}{2}$$

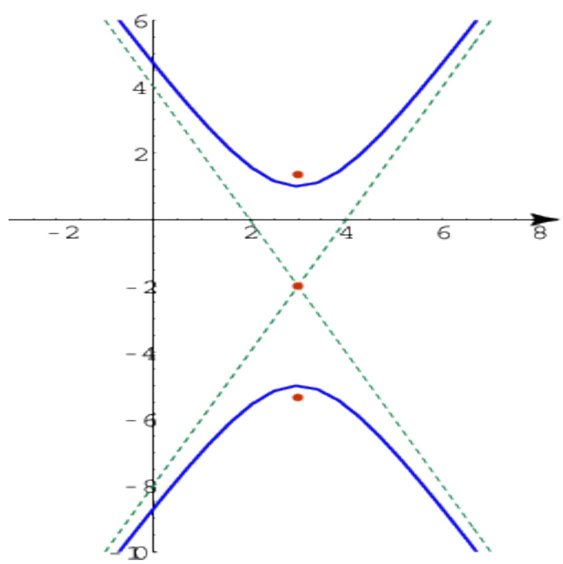
Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $(3,-2-\frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(3,-2+\frac{3\sqrt{5}}{2})$ y la excentricidad es $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$ La gráfica se muestra en la figura



Ejercicios Propuestos

1. Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la hipérbola tal que para cualquier punto sobre ella la diferencia entre sus distancias a los puntos $(-3,0)$ y $(-3,3)$ es 2.

2. Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la hipérbola con vértices en $(0,2)$ y $(6,2)$ y asíntotas en $y = 2/3x \ \wedge \ y = 4 - 2/3x$.

3. Hallar el valor de a de forma que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ sea tangente a la recta $2x - y = 4$.

4. Determine el tipo de cónica representada por la ecuación $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 1$ en los casos
    1. Si $k > 16$
    2. Si $0 < k < 16$
    3. Si $k < 0$

5. Determine la excentricidad de la cónica con ecuación $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$

6. Determina el tipo de cónicas representado por las siguientes ecuaciones y escribe la forma ordinaria de cada una:
    1. $y(y+6) = -4x - 1$
    2. $x^2 + 4x + 4(3y-8) = 0$
    3. $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y = 44$
    4. $16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 = 0$