Centro de Estudios Tecnológicos, Industrial y de Servicios No.1

"Coronel, Matilde Galicia Rioja"

GUIA DE ESTUDIO
PARA EXÁMEN EXTRAORDINARIO

CAMPO DISCIPLINAR: MATEMÁTICAS

ASIGNATURA*:* ***GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA***

SEMESTRE:

Agosto 2021- Enero 2022

RECOPILÓ:

PROF. ÁNGEL MARTÍNEZ PINEDA
PROF. ISMAEL GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

Profesor:____**Calificación:**____________

Alumno:____**Grupo:**____________

INTRODUCCIÓN

Esta guía tiene como finalidad suministrar los conceptos y ejercicios necesarios para una fácil comprensión de elementos contenidos en el programa de Geometría y Trigonometría para el bachillerato tecnológico. Con el fin de facilitar el estudio de la materia a través de una recapitulación de temas con ejercicios resueltos y propuestos para la preparación de un examen extraordinario.
Se recomienda leer cuidadosamente los conceptos e identificar los elementos clave para la solución de ejercicios.
Es necesario que después de realizar el análisis de cada ejercicio resuelto en ésta guía, se resuelvan los ejercicios propuestos, esto ayudará a aumentar la habilidad para la solución de los mismos.

Este compendio es un conjunto de temas y ejercicios recopilados de diferentes fuentes, tanto de trabajos de profesores de diferentes universidades, publicaciones en la web, así como de libros para bachillerato y de redacciones propias de los compiladores. Se encuentra estructurado de tal manera que el alumno lleve una continuidad de los temas abordados en clase y le sea útil para la presentación de su examen extraordinario.

1.- Conceptos.

• La geometría es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades intrínsecas de las formas y de los cuerpos; para ello se vale del uso de *postulados*, *definiciones* y *axiomas*, mismos que permiten establecer *teoremas.*

• Axioma: proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.

• Postulado: proposición no tan evidente como un axioma pero que también se admite sin demostración.

• Teorema: proposición que puede ser demostrada (Hipótesis + Tesis).

• Corolario: proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

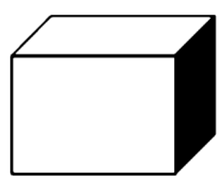
• Lema: proposición que sirve de base a la demostración de un teorema.

• Reducción al Absurdo: consiste en suponer lo contrario a lo que se quiere demostrar, y mediante un razonamiento, obtener una conclusión que se contradice con postulados o teoremas ya demostrados.

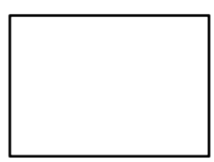
• Punto: El punto no se define. Un punto geométrico es imaginado tan pequeño que carece de dimensión. Se suelen designar por letras mayúsculas (Punto A).

• Línea: Conjunto de Puntos. o Línea Recta: Por dos puntos pasa una recta y solamente una. Dos rectas no pueden tener más que un solo punto común. Se suele designar por dos de sus puntos con el símbolo encima (AB). Una línea tiene una sola dimensión: longitud.

• Cuerpos Geométricos o Sólidos: Tienen tres (3) dimensiones: largo, ancho y alto.



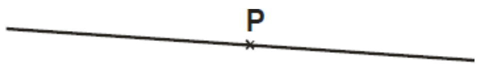
• Superficies: Son los límites que separan a los cuerpos del espacio que los rodea. Tienen dos (2) dimensiones: largo y ancho.



2.- Rectas

Recta.
Es una sucesión infinita de puntos que tienen la misma dirección. La recta no tiene ni principio ni fin. Por dos puntos del plano pasa una única recta. Se representa por medio de una letra minúscula.

Semirrecta
Es un punto de una recta la divide en dos semirrectas. La semirrecta tiene principio pero no tiene fin.

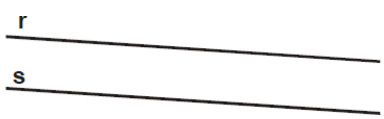


Segmento.- es la porción de recta limitada por dos puntos de la misma. A estos dos Puntos se les llama extremos del segmento.

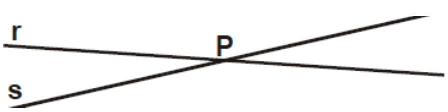
Notación: $\overline{AB}$

Tipos de rectas

Rectas paralelas.- son las rectas Situadas en el mismo plano que por mucho que se prolonguen nunca se cortan. Ambas rectas tienen la misma inclinación.

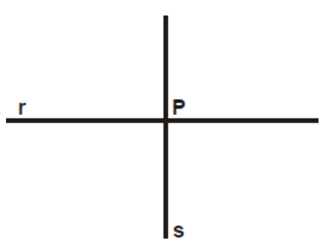


Rectas secantes.- son las rectas situadas en un mismo plano que se cortan en un punto.

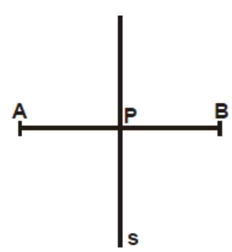


Rectas perpendiculares.- son las rectas secantes que dividen al plano en cuatro partes iguales formando cuatro ángulos rectos.

Mediatriz de un segmento.- es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Divide al segmento en dos partes iguales.



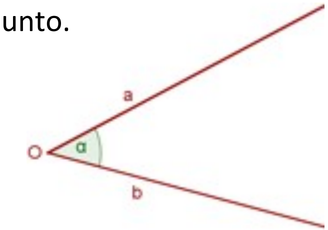
Rectas perpendiculares



Mediatriz de un segmento
$\overline{AP} = \overline{PB}$

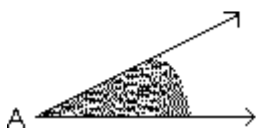
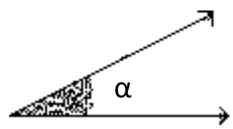
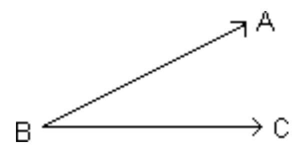
3.- Ángulos

- Es la figura formada por 2 semirrectas que parten de un mismo punto.
- Las semirrectas se llaman **lados** y el punto común **vértice**.

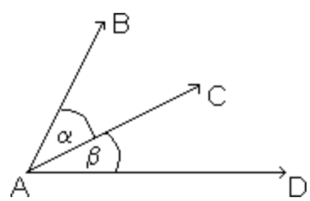


Elementos de un ángulo:

- Vértice.- Es el origen "O" común de los rayos.
- Lados.- Son los rayos que forman el ángulo.
- Notación.- A un ángulo, se le denota con los siguientes símbolos y formas.

a) Una letra mayúsculaen el vértice.	b) Una letra griega o un símbolo en la abertura.	c) Tres letras mayúsculas.
		

- Bisectriz.- Bisectriz de un ángulo, es un rayo que partiendo del vértice divide al ángulo en dos ángulos iguales.

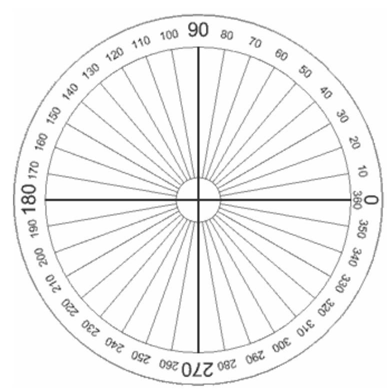


En la figura los ángulos α y β son iguales y el segmento AC es la bisectriz.

Para **medir ángulos** utilizamos:

El grado sexagesimal (°)
Grado sexagesimal es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.
1º = 60' = 3600''
1' = 60''

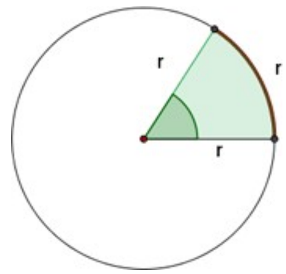
El símbolo de grado: °
Se usa un pequeño círculo ° después del número para indicar grados.
Por ejemplo **90°** significa **90 grados**



Un círculo completo son 360°
Medio círculo son 180° (esto se llama <u>ángulo llano</u>)
Un cuarto de círculo son 90° (y se llama <u>ángulo recto</u>)

Radián

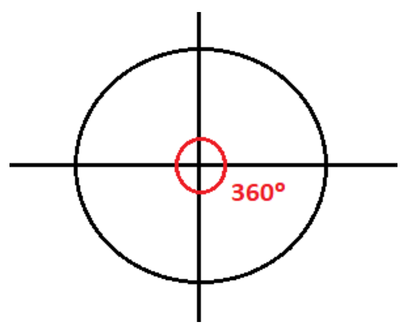
Radián (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.



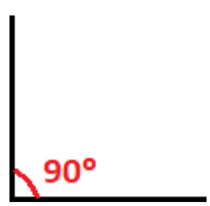
Para medir los ángulos se pueden utilizar dos unidades: los grados sexagesimales y los radianes. Ambas unidades son equivalentes ¿Y qué significa que sean equivalentes?

Pues que para el mismo ángulo, su valor lo puedes dar en ángulos o en radianes y por tanto se puede convertir de una unidad a otra.

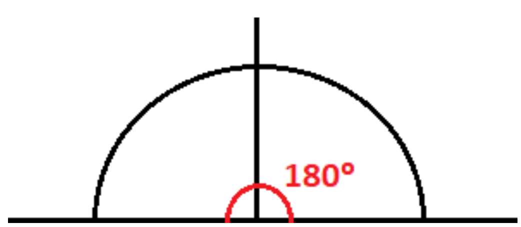
Normalmente, estamos más familiarizados con los grados, ya que es lo primer que nos enseñan. Como ya sabes, una vuelta completa de circunferencia tiene 360º:



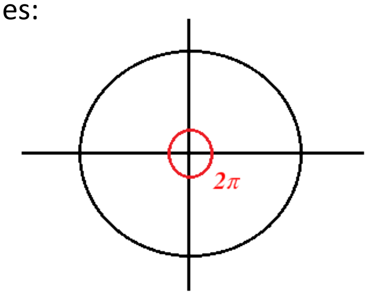
Un ángulo recto mide 90° :



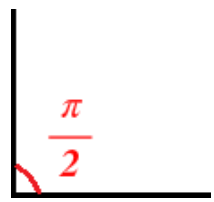
O una semicircunferencia tiene 180°:



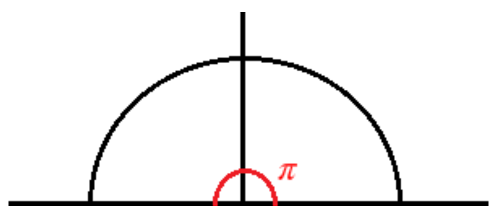
Esos mismos ángulos **también se pueden medir en radianes**.
Una circunferencia tiene 2π radianes:



Un ángulo recto tiene π/2 radianes:



Y una semicircunferencia mide π radianes:



Los radianes se escriben como múltiplos de π, siempre que sea posible, aunque no es obligatorio, pero es más cómodo trabajar con mútliplos de π, que ir arrastrando decimales. Además es mucho más exacto.

Pero, ¿cuál es la equivalencia entre grados y radianes?

Equivalente entre grados y radianes
La equivalencia entre grados y radianes es la siguiente:

$$\pi \ radianes = 180^o$$

π radianes equivalen a 180º
A partir de esta equivalencia, puedes pasar cualquier ángulo de grados a radianes o de radianes a grados y es lo que que te explicaré en los siguientes apartados.

Para pasar de grados a radianes lo hacemos mediante una **regla de tres**, teniendo en cuenta la equivalencia entre radianes y grados.
Por ejemplo, ¿cuántos radianes son 60º?
Planteamos la regla de tres: Si 180º son π radianes, 60º serán x radianes. Ponemos los grados debajo de los grados y los radianes debajo de los radianes:

$$180^o \text{ ------- } \pi \text{ radianes}$$

$$60^o \text{ ------- } x \text{ radianes}$$

Y ahora despejamos la x:

$$x=\frac{60.\pi}{180}=$$

Ya sólo nos queda operar. Para dejarlo el resultado en múltiplos de π , **simplificamos** los números que tenemos en la operación y nos queda:

$$=\frac{\pi}{3}$$

Por tanto, 60º equivalen a π /3 radianes:

$$60^o=\frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

Como te he comentado antes, no es obligatorio dejar los radianes en función de π , por lo que si te es más fácil, puedes sustituir π por 3,14 y operar con la calculadora, cuyo resultado será:

$$x=\frac{60.\pi}{180}=\frac{60.3,14}{180}=1,04 \text{ radianes}$$

Cómo pasar de radianes a grados paso a paso
Para pasar de radianes a grados, lo hacemos igual que antes, con una regla de 3, solo que esta vez, la incógnita a despejar serán los grados.

Vamos a verlo con un ejemplo:

¿Cuántos grados son 3π /4 radianes?
Planteamos la regla de tres: Si π radianes son 180º, 3π/4 radianes seran x grados:

$$\pi \text{ radianes ------- } 180^o$$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ radianes ------- } x^o$$

Despejamos la x y resolvemos:

$$x=\frac{180.\frac{3\pi}{4}}{\pi}=\frac{180.3\pi}{4\pi}=135^o$$

Por tanto 3π/4 radianes equivalen a 135°

$$\frac{3\pi}{4} \text{ radianes}=135^o$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Transforma a radianes los siguientes ángulos:

1. $210°$
2. $300°$
3. $225°$
4. $450°$
5. $72°$
6. $100°$
7. $30°$

Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

1. $\frac{2}{3}\pi$
2. $\frac{11}{6}\pi$
3. $\frac{3}{4}\pi$
4. $\frac{4}{3}\pi$
5. 7π
6. $\frac{1}{9}\pi$
7. $\frac{13}{5}\pi$
8. $\frac{1}{12}\pi$

RESULTADOS

1. $\frac{7}{6}\pi\ rad = 3.665\ rads$
2. $\frac{5}{3}\pi\ rad = 5.236\ rads$
3. $\frac{5}{4}\pi\ rad = 3.927\ rads$
4. $\frac{5}{2}\pi\ rad = 7.854\ rads$
5. $\frac{2}{5}\pi\ rad = 1.256\ rads$
6. $\frac{5}{9}\pi\ \mathrm{rad} = 1.745\ rads$
7. $\frac{1}{6}\pi\ rad = 0.523\ rad$

1. $120°$
2. $330°$
3. $135°$
4. $240°$
5. $1260°$
6. $20°$
7. $468°$
8. $15°$

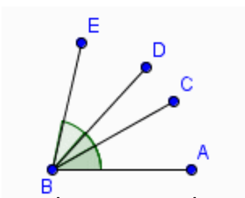
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS POR SU MEDIDA, POSICIÓN Y SUMA.

Los ángulos se clasifican por varios criterios:

a) Según su medida
b) Según su posición
c) Según su suma.

Según su medida

Ángulo agudo

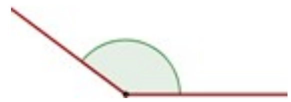


Mide **menos** de **90º**.
$0° < \alpha < 90°$

Y ***Ángulo recto***

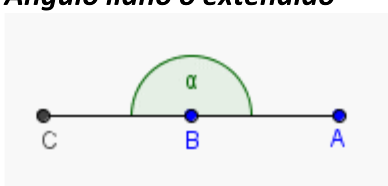
Mide **90º**.
$\alpha = 90°$

Ángulo obtuso



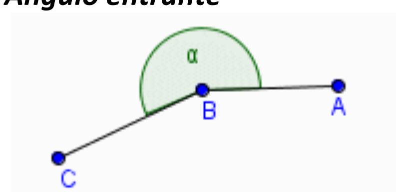
Mide **más** de **90º**.
$90° < \alpha < 180°$

Ángulo llano o extendido



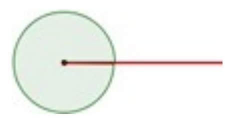
Mide **180°** $\alpha = 180°$

Ángulo entrante



$180° < \alpha < 360°$

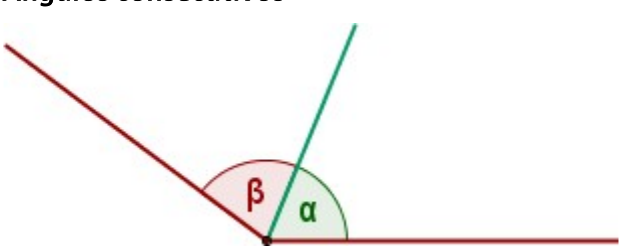
Ángulo perígono



Mide **360º**.

Según su posición

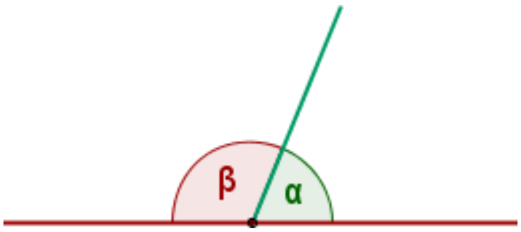
Ángulos consecutivos

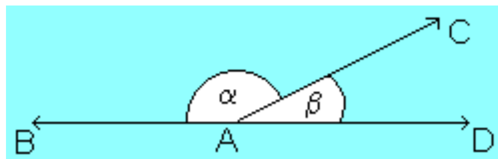


Son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

Ángulos adyacentes

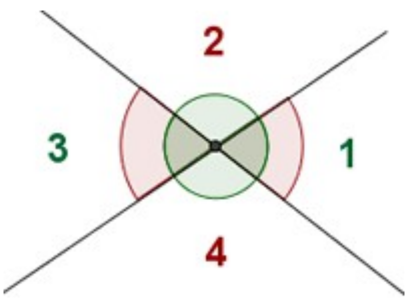
Son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en prolongación del otro. Forman un ángulo llano.





BAC es adyacente con <DAC

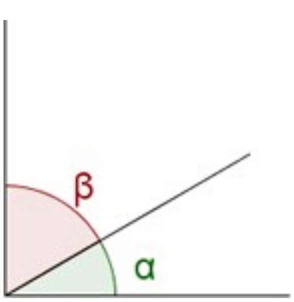
Ángulos opuestos por el vértice



Son los que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.
Los ángulos **1** y **3** son iguales.
Los ángulos **2** y **4** son iguales.

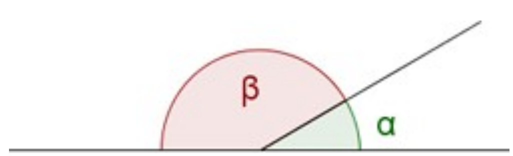
Según su suma

Ángulos complementarios



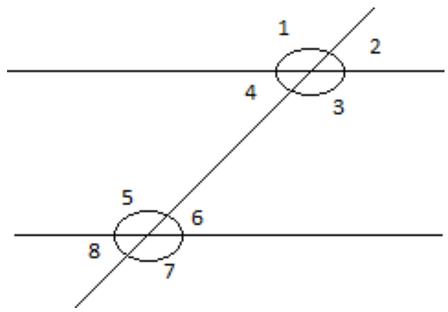
Dos ángulos son complementarios si suman 90°

Ángulos suplementarios



Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

Rectas paralelas cortadas por una recta secante



- **Ángulos alternos internos:** Situados en distinto lado de la secante.

Donde:

1. El ángulo "3" es igual al ángulo "5"
2. El ángulo "4" es igual al ángulo "6"

- **Ángulos alternos externo:** Situados en distinto lado de la secante

Donde:

1. El ángulo "1" es igual al ángulo "7"
2. El ángulo "2" es igual al ángulo "8"

- **Ángulos correspondientes:** Dos ángulos no adyacentes, situados en un mismo lado de la secante:

Donde:

1. El ángulo "1" es igual al ángulo "5"
2. El ángulo "4" es igual al ángulo "8"
3. El ángulo "2" es igual al ángulo "6"
4. El ángulo "3" es igual al ángulo "7"

- **Ángulos colaterales internos (suplementarios):** Dos ángulos internos no adyacentes, y situados en el mismo lado de la secante, suman 180°

Donde:

1. El ángulo "4" más el ángulo "5" son igual a 180°
2. El ángulo "3" más el ángulo "6" son igual a 180°

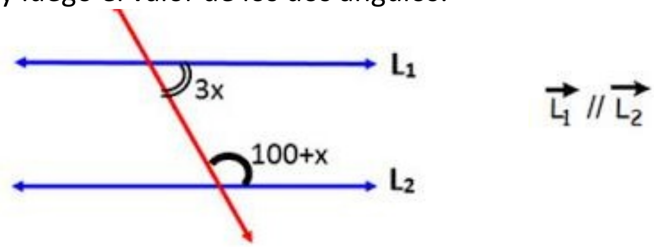
- **Ángulos colaterales externos (suplementarios):** Dos ángulos externos no adyacentes situados en el mismo lado de la secante, suman 180°

Donde:

1. El ángulo "1" más el ángulo "8" son igual a 180°
2. El ángulo "2" más el ángulo "7" son igual a 180°

PROBLEMAS RESUELTOS

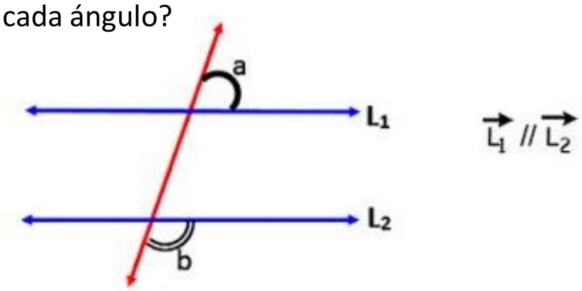
1. En la siguiente figura hallar "x" y luego el valor de los dos ángulos:



SOLUCIÓN:

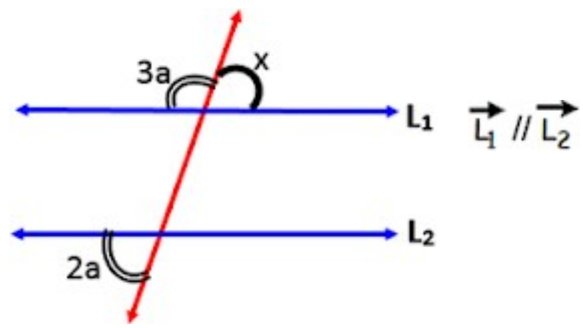
< 1 = 3x
< 2 = 100 + x
Los ángulos "1" y "2" son conjugados internos, su suma siempre es 180°.
< 1 + < 2 = 180°
3x + 100 + x = 180
3x + x = 180 - 100
4x = 80
x = 80/4
x = 20°
Ahora reemplazamos:
< 1 = 3x = 3 (20) = 60°
< 2 = 100 + x = 100 + 20 = 120°
Respuesta: Los ángulos miden 60° y 120°

2. Dos rectas paralelas son intersecadas por una transversal. Si dos ángulos conjugados externos son entre sí como 2 a 3. ¿Cuánto mide cada ángulo?



SOLUCIÓN:
< a = 2x
< b = 3x
Los ángulos "a" y "b" son conjugados externos, su suma siempre es 180°.
< a + < b = 180°
2x + 3x = 180
5x = 180
x = 180/5
x = 36°
Ahora reemplazamos:
< a = 2x = 2 (36) = 72°
< b = 3x = 3 (36) = 108°
Respuesta: Los ángulos miden 72° y 108°

3. En la siguiente figura hallar "x"



SOLUCIÓN:
Los ángulos "3a" y "2a" son conjugados externos, su suma siempre es 180°.
3a + 2a = 180°
5a = 180
a = 180/5
a **= 36°**
Ahora reemplazamos:
3a = 3 (36) = 108°

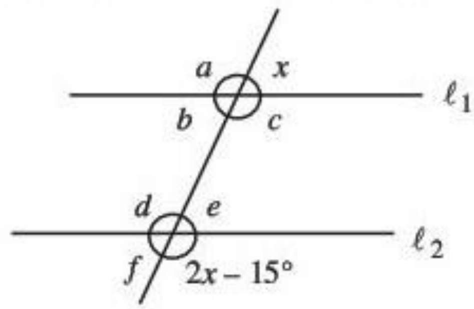
Pero el ángulo "3a" y el ángulo "x" son ángulos adyacentes, su suma es 180°.

108° + x = 180°

x = 180° - 108°

x = 72°
Respuesta: El valor de "x" es 72°

4. Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, calcula el valor de los ángulos a, b, c, d, e, f, x, y $2x - 15°$, de la siguiente figura:



Solución

Los ángulos x y $2x - 15°$ son colaterales externos, entonces:

$$x + (2x - 15°) = 180° \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 15° &= 180° \\ 3x &= 180° + 15° \\ 3x &= 195° \\ x &= \frac{195°}{3} \\ x &= 65° \end{aligned}$$

Los ángulos a y x son ángulos suplementarios:

$$a + x = 180° \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 180° - x \\ a &= 180° - 65° \\ a &= 115° \end{aligned}$$

Para obtener los valores de los ángulos restantes, únicamente se toma la posición de cada par de ángulos:

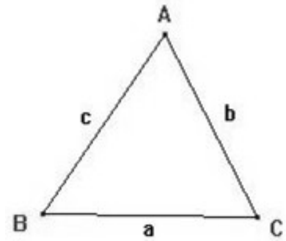
$\angle d = \angle a$	por ser correspondientes, entonces $\angle d = 115°$
$\angle c = \angle a$	por ser opuestos por el vértice, en consecuencia $\angle c = 115°$
$\angle e = \angle x$	por ser correspondientes, se determina que $\angle e = 65°$
$\angle f = \angle e$	por ser opuestos por el vértice, por tanto $\angle f = 65°$

Luego, los valores de los ángulos son:

$\angle a = 115°$	$\angle x = 65°$
$\angle d = 115°$	$\angle b = 65°$
$\angle c = 115°$	$\angle e = 65°$
$\angle 2x - 15° = 115°$	$\angle f = 65°$

4.- TRIÁNGULOS

Un triángulo es el polígono que resulta de unir 3 puntos con líneas rectas.

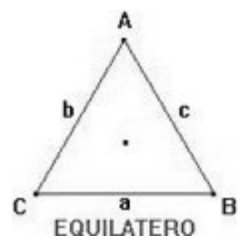


Todo triángulo tiene 3 lados (a, b y c), 3 vértices (A, B y C) y 3 ángulos interiores (A, B y C)
Habitualmente se llama lado a al lado que no forma parte del ángulo A. Lo mismo sucede con los lados b y c y los ángulos B y C.

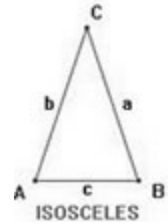
Los triángulos podemos clasificarlos según 2 criterios:

Según la medida de sus lados

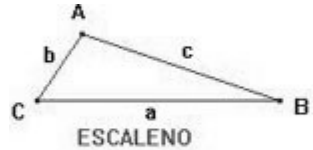
- Equilátero
  Los 3 lados (a, b y c) son iguales
  Los 3 ángulos interiores son iguales



- Isósceles
  Tienen 2 lados iguales (a y b) y un lado distinto (c)
  Los ángulos A y B son iguales, y el otro agudo es distinto

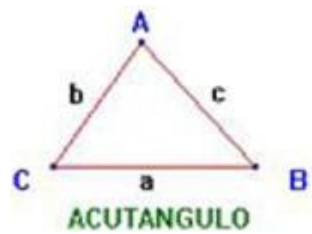


- Escaleno
  Los 3 lados son distintos
  Los 3 ángulos son también distintos

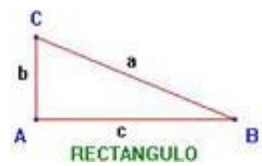


Según la medida de sus ángulos

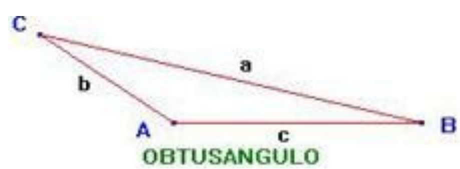
- Acutángulo
  Tienen los 3 ángulos agudos (menos de 90 grados)



- Rectángulo
El ángulo interior A es recto (90 grados) y los otros 2 ángulos son agudos
Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos (c y b), el otro lado hipotenusa



- Obtusángulo
  El ángulo interior A es obtuso (más de 90 grados)
  Los otros 2 ángulos son agudos

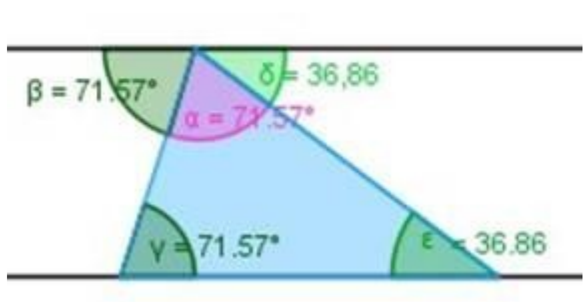


ÁNGULOS EN EL TRIÁNGULO TEOREMAS FUNDAMENTALES

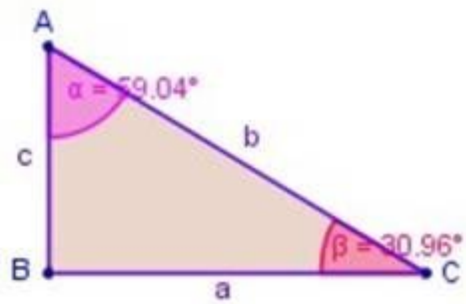
Los ángulos que se forman en un triángulo se relacionan entre sí cumpliendo con las siguientes propiedades o características:

1.- La suma de los ángulos internos de un triágulo es igual a dos ángulos rectos; es decir, suman 180º.

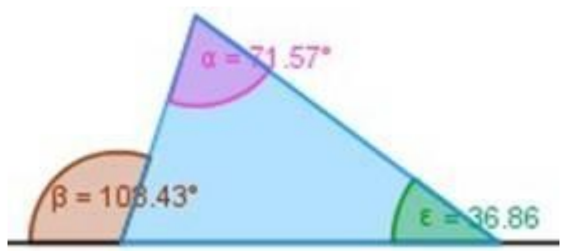
En la figura, $\alpha + \gamma + \varepsilon = 180º$. Recordar que $\gamma = \beta$ y que $\varepsilon = \delta$ por ser ángulos alternos internos.



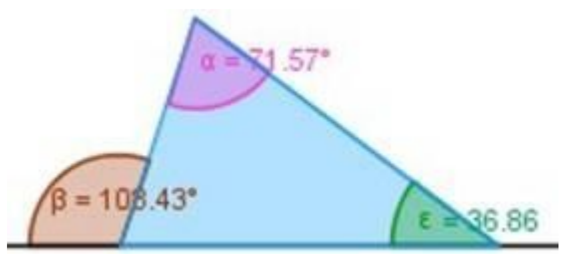
2.- La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90º.
En la figura, **α + β = 90º**



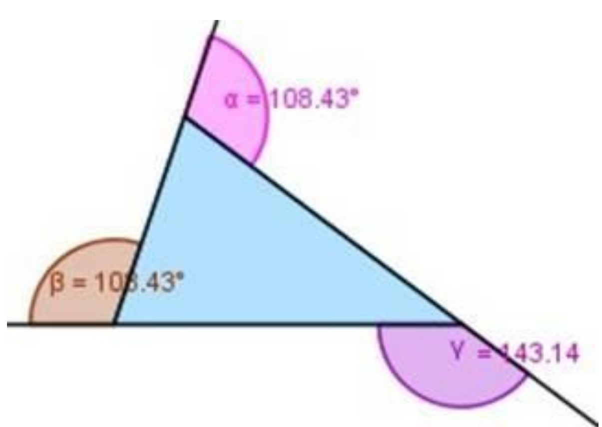
3.- En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos (opuestos).
En la figura, **β = α + ε**



4.- En todo triángulo la medida de un ángulo externo es mayor que la de cualquier ángulo interior no adyacente.
En la figura,
β > (es mayor que) α
β > (es mayor que) e

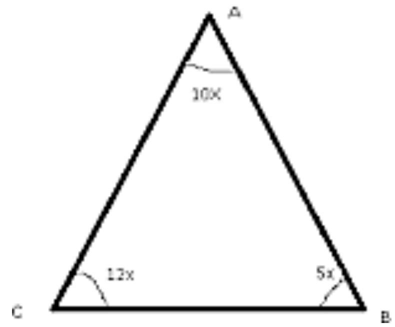


5.- La suma tres ángulos exteriores de cualquier triángulo vale cuatro ángulos rectos; es decir, suman 360º.
En la figura, **α + β + γ = 360º**



Ejercicios Resueltos

Ejemplo 1



Según este triángulo tenemos que la medida del ángulo A es igual a 10x, el ángulo B es igual a 5x y el ángulo C es igual a 12x

Establecemos nuestra ecuación:

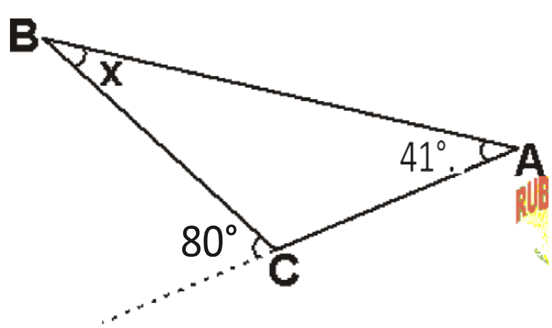
10x+5x+12x=180 pasamos a resolverla

27x=180
x=180/27
x=6.66° y si el ángulo A que es igual a 10x es 10(6.66)=60.66°

y el ángulo B es igual a 5x entonces 5(6.66)=30.66°

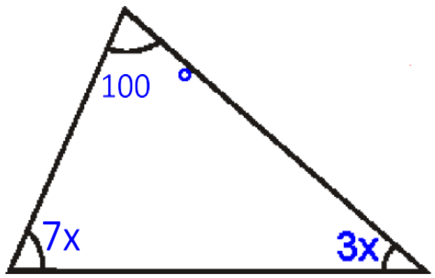
y el ángulo C es igual a 12x entonces es 12(6.66)=80°

2.- En la figura, hallar "x"



RESOLUCION:
Sabemos que la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos, entonces:
x+41°=8O° —> x=80° — 41° = 39° También podemos decir que la suma interna de los ángulos internos son 180° por lo tanto. X+41°+100°=180° Así X=180-141 y X=39°

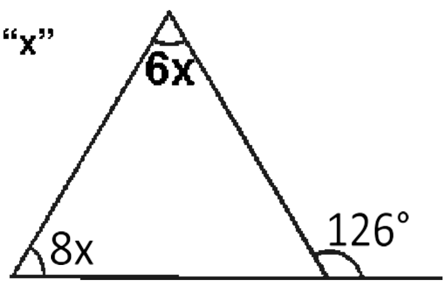
3.- Calcular “x"



RESOLUCIÓN:
Sabemos que la suma de la medidas de los angulos interiores es 180°, Luego :

7x+3x+100°=18D° => 10x=80° => x=8°

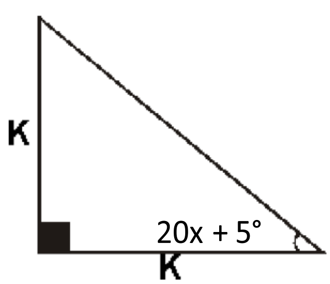
4.- Calcular “x”



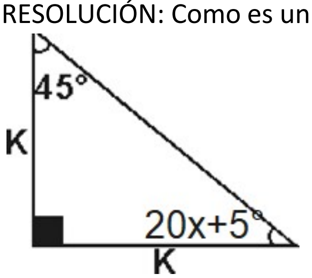
RESOLUCIÓN:
Sabemos que la suma de dos ángulos interiores es igual a un exterior, luego:

8x + 6x =126°
14x=126°
X=9°

5.- Calcular “x”



RESOLUCIÓN: Como es un triángulo rectángulo isósceles



2Ox+5°=45°
2Ox=4O°
x=2°

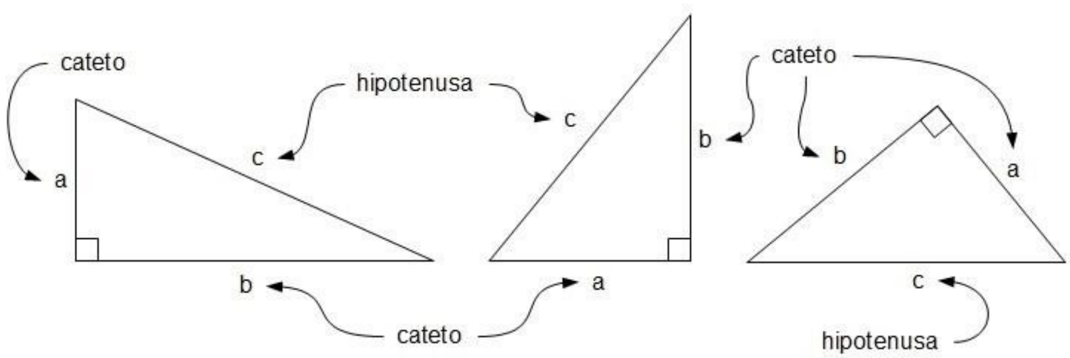
5.- Teorema de Pitágoras

El **Teorema de Pitágoras** es un teorema que nos permite **relacionar los tres lados de un triángulo rectángulo**, por lo que es de enorme utilidad cuando conocemos dos de ellos y queremos saber el valor del tercero.

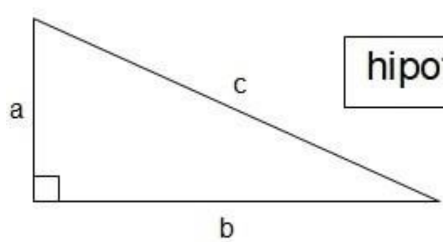
También nos sirve para **comprobar**, conocidos los tres lados de un triángulo, **si un triángulo es rectángulo**, ya que si lo es sus lados deben cumplirlo.

Como ya sabes, un triángulo rectángulo es aquél en el que uno de sus tres ángulos mide 90 grados, es decir, es un ángulo recto. Está claro que si uno de los ángulos es recto, ninguno de los otros dos puede serlo, pues deben sumar entre los tres 180 grados.

En los triángulos rectángulos se distinguen unos lados de otros. Así, al lado mayor de los tres y opuesto al ángulo de 90 grados se le llama **hipotenusa**, y a los otros dos lados **catetos**.



Pues bien, el **Teorema de Pitágoras** dice que: «**En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**«.



$$\boxed{\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^{\,2} + \text{cateto}_2^{\,2}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

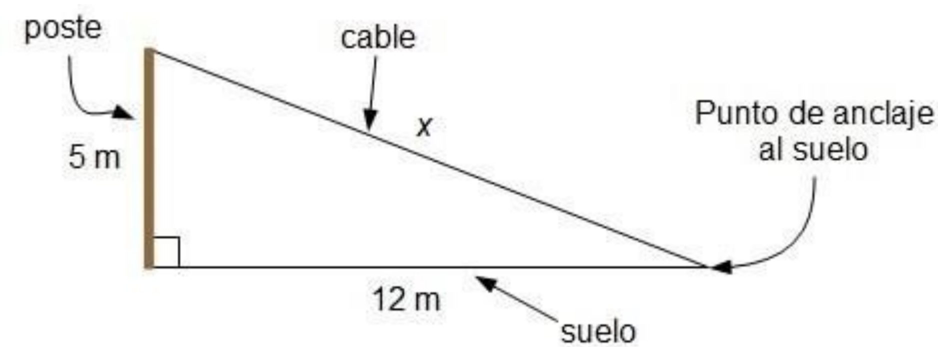
Si lo expresamos **de forma geométrica**, el Teorema de Pitágoras quiere decir que el **área de un cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de otros dos cuadrados cuyos lados son cada uno de los catetos respectivamente**.

Vamos a ver una **aplicación práctica del Teorema de Pitágoras** para calcular un lado desconocido en un triángulo rectángulo.

Problema 1

Se quiere sujetar un poste vertical de 5 metros de altura con un cable tirante desde su parte más alta hasta el suelo. Si la distancia desde el punto de anclaje del cable en el suelo a la base del poste es de 12 metros, ¿cuánto debe medir el cable?

Como el poste vertical es perpendicular al suelo, forma un ángulo recto con él. Si consideramos el propio poste, el cable y la distancia entre la base del poste y el punto de anclaje al suelo, tenemos un triángulo rectángulo:



Llamando *x* a la longitud del cable, y aplicando el Teorema de Pitágoras, se debe cumplir que:

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

$$x^2 = 25 + 144 = 169$$

$$x = \sqrt{169} = 13$$

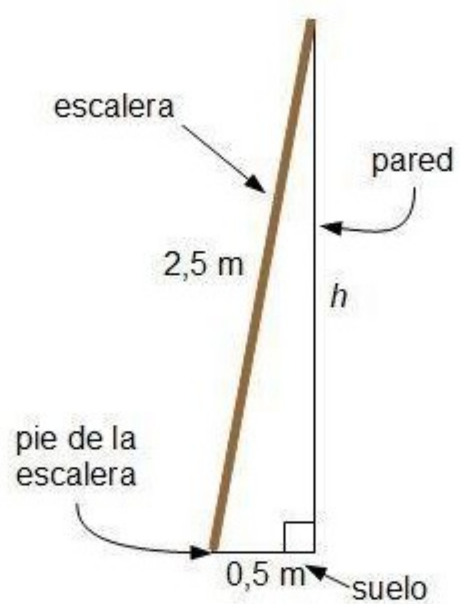
Es decir, **el cable debe medir 13 metros**.

Antes de seguir, quiero dejar claro que, la ecuación de segundo grado incompleta anterior tendría dos posibles soluciones, 13 y -13, pero al tratarse de longitudes, **no tiene sentido el resultado negativo**, por lo que solo he tenido en cuenta directamente el positivo. Esto es algo que haremos siempre al utilizar el Teorema de Pitágoras.

Problema 2

Una escalera de 2,5 metros de longitud está apoyada en una pared vertical. Si el pie de la escalera está colocado a medio metro de dicha pared, ¿a qué altura llega la parte superior de la escalera?

Al ser la pared vertical, la pared y el suelo son perpendiculares. Si consideramos la escalera, la altura que alcanza ésta en la pared medida desde el suelo, y la distancia del pie de la escalera a la pared, tenemos un triángulo rectángulo:



Llamando *h* a la altura que alcanza la escalera en la pared, y aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$2,5^2 = 0,5^2 + h^2$$

$$h^2 = 2,5^2 - 0,5^2$$

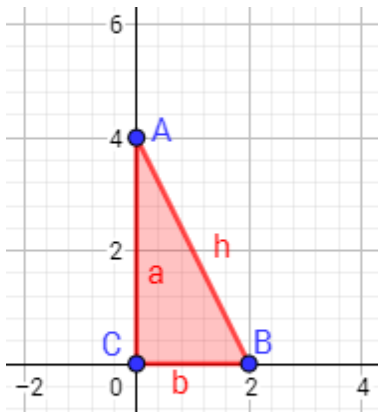
$$h^2 = 6,25 - 0,25 = 6$$

$$h = \sqrt{6} = 2,45$$

La escalera llega a una altura de 2,45 metros.

Problema 3

En el siguiente triángulo, ¿cuál de los lados es la hipotenusa y cuál es el ángulo recto?



Calcular cuánto mide la hipotenusa.

Solución

Los catetos son los lados a y b. La hipotenusa es el lado h. El ángulo recto es el ángulo que forman ambos catetos.
Para calcular la longitud de la hipotenusa, aplicamos Pitágoras. Los catetos miden a=4 y b=2, con lo que:

$h^2 = 2^2 + 4^2$
$h^2 = 4 + 16$
$h^2 = 20$

Finalmente, hacemos la raíz cuadrada:

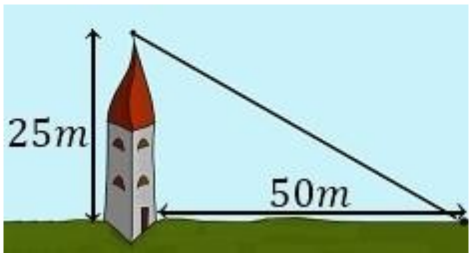
$$h = \sqrt{20}$$

Simplificamos el resultado escribiendo el radicando como un producto y aplicando la propiedad de que la raíz de una producto es el producto de las raíces de sus factores:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{4 \cdot 5} = \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Si aproximamos, h≃4,47h≃4,47.

Problema 4



Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?

Solución

El cable coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a=25m y b=50m .

Calculamos la longitud del cable (es la hipotenusa h):

$$
\begin{aligned}
h^2 &= 25^2 + 50^2 \\
h^2 &= 625 + 2500 \\
h^2 &= 3.125 \\
h &= \sqrt{3.125}
\end{aligned}
$$

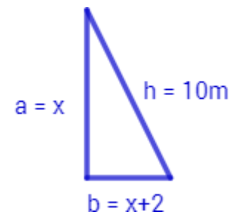
Como 3.125=252·53.125=252·5, podemos simplificar:

$$
\begin{aligned}
h &= \sqrt{3.125} \\
&= \sqrt{25^2 \cdot 5} = \\
&= \sqrt{25^2} \cdot \sqrt{5} = \\
&= 25\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

El cable debe medir $h=25\sqrt{5}$metros, es decir, aproximadamente 55.9 metros.

Problema 5

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 metros y sus catetos miden xx y x+2x+2:



¿Cuánto miden los catetos?

Solución

Por Pitágoras, h2=a2+b2 , con lo que

$$10^2 = x^2 + (x+2)^2$$

No olvidemos la fórmula del cuadrado de un binomio:

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Sustituyendo,

$$100 = x^2 + x^2 + 4x + 4$$

Simplificamos la ecuación:

$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-96)}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 768}}{4} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{784}}{4} =$$

$$= \frac{-4 \pm 28}{4} = \begin{cases} 6 \\ -8 \end{cases}$$

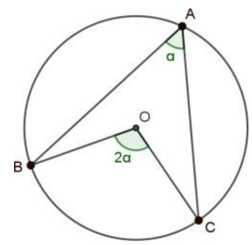
Como x representa una longitud, la solución debe ser positiva: x=6. Los catetos miden 6 y 8 metros.

6.- ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Centrales: su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

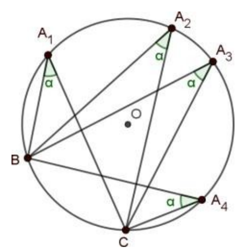
Inscritos: su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.

Miden la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.



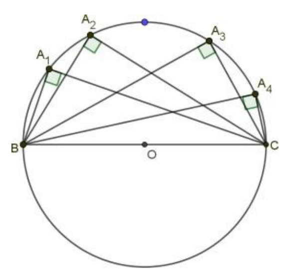
Consecuencias:

1) Todos los inscritos que abarcan el mismo arco sobre la misma circunferencia son iguales



entre sí.

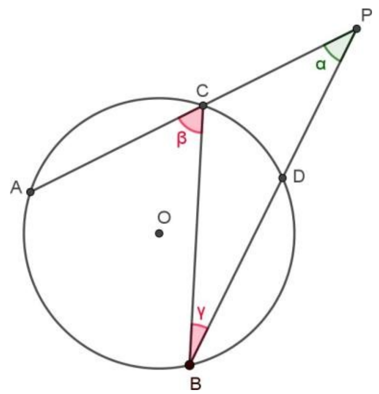
2) Los inscritos que abarcan media circunferencia son todos rectos.



Desde cualquier punto de la circunferencia que no sea B ni C, se ve un diámetro BC bajo ángulo recto.

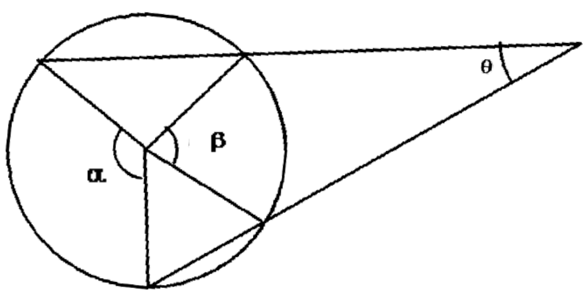
3) Un cuadrilátero convexo ABCD está inscrito en una circunferencia si y sólo si dos ángulos opuestos del mismo suman 180º. En tal caso, el cuadrilátero ABCD se dice que es un **cuadrilátero cíclico**. Más adelante volverán a aparecer.

Exteriores: su vértice P está en el exterior de la circunferencia y sus lados son dos secantes.

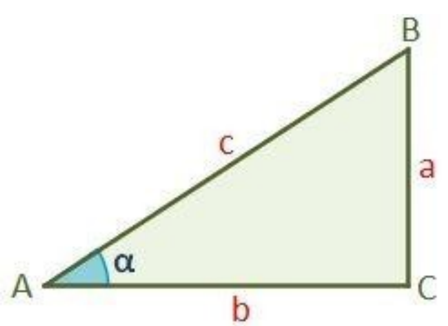


$$\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \alpha = \beta - \gamma = \frac{\widehat{AOB} - \widehat{COD}}{2}$$

También se puede dar el siguiente caso donde $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$



7.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Las **razones trigonométricas** de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, la comparación por su cociente de sus tres lados *a*, *b* y *c*.

Sea α uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

- El **seno** de un **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y la hipotenusa (*c*).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

- El **coseno** se define como la **razón** entre el cateto contiguo o cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*).

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

- La **tangente** es la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y el cateto contiguo o cateto adyacente (*b*).

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$

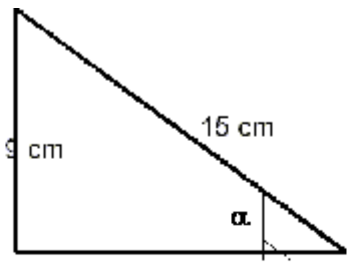
Razones trigonométricas de ángulos característicos:

El **seno**, **coseno** y **tangente** de los **ángulos** más **característicos** (0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º y 270º) son:

α grados	α radianes	$sen \propto$	$cos \propto$	$tan \propto$
0°	0	0	1	0
30°	$^1/_6\pi$	$^1/_2$	$\sqrt{3}/_2$	$\sqrt{3}/_3$
45°	$^1/_4\pi$	$\sqrt{2}/_2$	$\sqrt{2}/_2$	1
60°	$^1/_3\pi$	$\sqrt{3}/_2$	$^1/_2$	$\sqrt{3}$
90°	$^1/_2\pi$	1	0	∞
120°	$^5/_8\pi$	$\sqrt{3}/_2$	$^1/_2$	$\sqrt{3}$
135°	$^3/_4\pi$	$\sqrt{2}/_2$	$-\sqrt{2}/_2$	-1
150°	$^5/_8\pi$	$^1/_2$	$\sqrt{3}/_2$	$-\sqrt{3}/_3$
180°	π	0	-1	0
225°	$^5/_4\pi$	$-\sqrt{2}/_2$	$-\sqrt{2}/_2$	1
270°	$^3/_2\pi$	-1	0	∞
315°	$^7/_4\pi$	$-\sqrt{2}/_2$	$\sqrt{2}/_2$	-1

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 1: Calcula las razones trigonométricas del ángulo α :



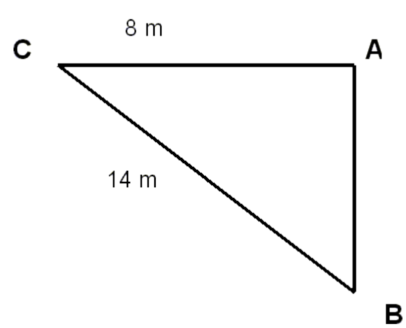
Como ves, los tres lados del triángulo son conocidos, así que para calcular las razones trigonométricas sólo tenemos que aplicar las fórmulas y sustituir. Para el ángulo α el cateo opuesto es 9, el contiguo 12 y la hipotenusa 15.

$$sen\,\alpha = \frac{9}{15} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{15} = 0{,}8$$

$$tg\,\alpha = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

EJERCICIO 2: Calcula las razones trigonométricas del ángulo C del siguiente triángulo



Ahora en este ejercicio ya no tenemos los tres lados, falta uno de los catetos y para calcularlo vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras.
Lo primero ponerle nombre a los lados. Vamos a llamarle con letras minúsculas a los lados que están enfrente del ángulo con la correspondiente letra mayúscula; es decir a = 14 m, b = 8 m y c es el lado que queremos calcular.

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2$

$14^2 = 8^2 + c^2$

$196 = 64 + c^2$

$196 - 64 = c^2$

$132 = c^2$

$11{,}49 = c$

Luego c = 11, 49 m.

y aplicando las fórmulas tenemos:

$$senC = \frac{11{,}49}{14} = 0{,}82$$

$$\cos C = \frac{8}{14} = 0{,}57$$

$$tgC = \frac{11{,}49}{8} = 1{,}44$$

EJERCICIO 3: Determina los ángulos del ejercicio anterior.

Obviamente ya sabemos que el ángulo A es el ángulo recto y por tanto A = 90°.

Para calcular los otros dos vamos a hacerlo con las razones trigonométricas y con la ayuda de la calculadora.

Si queremos calcular el ángulo C con los datos que parto, lo primero es identificar los lados que conozco respecto al ángulo C, que en este caso son ***cateto adyacente e hipotenusa*** y pienso en qué razón trigonométrica intervienen esos lados. La respuesta es el coseno, así que calculo ***cos C***

Cos C = 8 / 14 = 0,57.

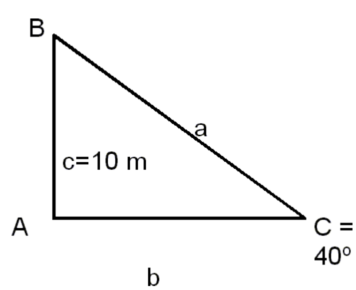
Ahora con la calculadora sacamos cuál es el ángulo, utilizando la función inversa de la tecla "cos", y el resultado es C = 55,25°.

Para calcular B puedo hacer lo mismo, pensar qué razón puedo calcular, o como ya tengo dos ángulos, sacarlo de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180° *(A + B + C = 180).*

Por cualquier camino el resultado es B = 34,75°

EJERCICIO 4: De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulos agudos es 40° y que el cateto opuesto a éste mide 10m. Calcula el ángulo y los lados que faltan.

Lo primero es hacer un dibujo que nos aclare la situación y ponerle nombre a los lados y ángulos



Esta sería nuestra situación.

Para empezar los más fácil es sacar el ángulo que falta, y aplicando que la suma de los tres es 180°, el ángulo B vale 50°.

Vamos a calcular ahora por ejemplo el lado "b". Si me fijo en el ángulo C, el lado que sé es el cateto opuesto y el que pretendo calcular es el adyacente. Como la razón trigonométrica en la que intervienen estos es la tangente, voy a calcularla con la calculadora y despejar a partir de ahí:

$$tgC = tg40 = \frac{c}{b} = \frac{10}{b} \Rightarrow b = \frac{10}{tg40} = \frac{10}{0,84} = 11,9m$$

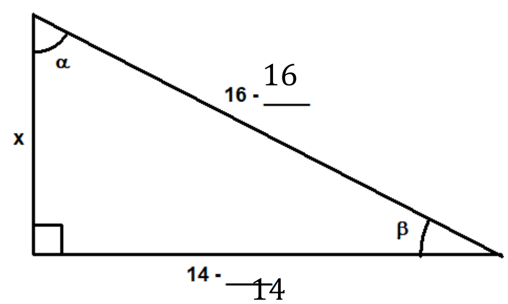
Por tanto ya tenemos el lado "b". Para calcular el lado "a" podríamos aplicar Pitágoras o sacarlo por alguna razón. Vamos a seguir este camino que será más corto.

Por ejemplo voy a fijarme en el lado "c" y el ángulo "C", aunque ya podría utilizar cualquiera de los datos que tengo. Para el ángulo "C" sé cateto opuesto y quiero hipotenusa; así que habrá que utilizar el seno:

$$senC = sen40 = \frac{c}{a} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10}{sen40} = \frac{10}{0,64} = 15,62m$$

EJERCICIO PROPUESTO

1.- De acuerdo a la siguiente figura, contesta los siguientes incisos.



a) Utilizando el teorema de Pitágoras obtén el valor del cateto **x**.

b) Con los datos obtenidos escribe las siguientes razones trigonométricas:

$sen\ \alpha = —$	$sen\ \beta = —$
$cos\ \alpha = —$	$cos\beta = —$
$tan\ \alpha = —$	$tan\ \beta = —$

c) Obtén el valor del ángulo α y del ángulo β